

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

**CÁLCULO DE EQUILIBRIOS TOROIDALES EN
PLASMAS DE FUSIÓN NUCLEAR**

Lic. Pablo Esteban Montes
Estudiante de Maestría

Dr. Pablo García Martínez
Director

Miembros del Jurado
Dr. Mariano Cantero (CNEA-CONICET)
Dr. Flavio Colavechia (CNEA-CONICET)
Dr. Hugo Ferrari (CNEA-CONICET)

18 de Diciembre de 2017

Sección Fusión Nuclear Controlada y Física de Plasmas
Gerencia de Física
Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mis amigos,
A mi familia.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
1. Introducción	1
1.1. Fusión nuclear	1
1.1.1. Potencia de fusión	3
1.2. Métodos de confinamiento	4
1.2.1. Tokamaks	5
1.2.2. Otras configuraciones toroidales	6
1.2.3. Proyecto ITER	7
1.3. Escenarios de operación	9
1.4. Modelo MHD	11
1.5. Equilibrio de fuerzas	12
2. Equilibrio	13
2.1. Ecuación de Grad-Shafranov	13
2.1.1. Interpretación de Ψ y superficies de flujo	15
2.1.2. Flujo toroidal y coordenadas de flujo	17
2.2. Parámetros del plasma y figuras de mérito	18
2.2.1. Campo magnético externo	18
2.2.2. Parámetros geométricos	19
2.2.3. Figuras de mérito	20
2.2.4. Corriente total	22
2.3. Adimensionalización y escalas de referencia	23
2.4. Formulación del problema del equilibrio	23

2.4.1.	Condiciones de Contorno	23
2.4.2.	Problema no lineal de frontera fija	25
2.4.3.	Problema lineal de autovalores	26
3.	Métodos numéricos	29
3.1.	Resolución del problema no-lineal del equilibrio	29
3.1.1.	Formulación variacional de la ecuación de Grad-Shafranov	30
3.1.2.	Método de Newton-Raphson	30
3.1.3.	Condición de borde	31
3.2.	Resolución del problema lineal de autovalores	31
3.2.1.	Caso libre de fuerzas	32
3.3.	Método de elementos finitos	33
3.3.1.	Discretización espacial	33
3.3.2.	Funciones base	34
3.3.3.	Formulación variacional	36
3.3.4.	Método de Galerkin	37
4.	Mapeo de flujos magnéticos	39
4.1.	Acoplamiento entre los procesos de transporte y la condición de equilibrio	39
4.1.1.	Modelos de transporte orientados a control	40
4.2.	Promediado sobre superficies de flujo	43
4.2.1.	Cálculo del factor de seguridad	44
4.2.2.	Ecuación de Grad-Shafranov promediada	45
4.3.	Mapeo aproximado de flujos magnéticos	45
4.3.1.	Actualización del equilibrio	45
4.3.2.	Método iterativo para cálculo del equilibrio	48
4.3.3.	Factor de seguridad y otros perfiles	49
5.	Resultados	51
5.1.	Escenarios de operación de ITER	51
5.1.1.	Implementación	53
5.1.2.	Densidad de corriente	55
5.1.3.	Corriente y factor Beta	56
5.2.	Evolución del equilibrio debido a la difusión magnética	56
5.2.1.	Datos externos	57
5.2.2.	Descripción de la descarga	57
5.2.3.	Implementación	57
5.2.4.	Actualización intermitente del equilibrio	59
5.3.	Resumen	62

Índice de contenidos	vii
6. Conclusiones	65
Agradecimientos	71

Índice de figuras

1.1. Reactividad en función de la energía de colisión en el sistema centro de masa para distintas reacciones de fusión	2
1.2. Figura que muestra las bobinas y los parametros de un tokamak circular	5
1.3. Configuraciones RFP y Spheromak. A la derecha se muestran los campos toroidales y poloidales desde el eje magnético hasta la separatriz.	7
1.4. Corte transversal posta de ITER	8
1.5. Escenarios de operación	10
2.1. Los contornos $\Psi = \text{constante}$ determinan las superficies magnéticas sobre las que yacen las líneas de campo magnético y densidad de corriente.	15
2.2. Esquema del flujo magnético poloidal.	16
2.3. Coordenadas de flujo.	17
2.4. La figura muestra algunas curvas más o menos lindas	19
2.5. Triangularidad para $\kappa = 1,8$ y elongación para $\delta = 0,4$	20
2.6. Diferenciales de flujo utilizados para el cálculo de q . Una línea de campo atraviesa q veces dS_{pol} por cada vez que atraviesa dS_{tor}	22
2.7. Sección poloidal de un tokamak. El plasma está limitado por la separatriz, en el interior de una cámara de vacío. La forma de la separatriz resulta del balance de fuerzas entre la distribución de la corriente toroidal en el plasma y las corrientes que circulan por las bobinas externas indicadas.	24
2.8. Dos soluciones del problema de autovalores con igual corriente total y distinto valor de β . El eje magnético de la solución de mayor β está desplazado hacia el exterior. Este efecto se denomina <i>corrimiento de Shafranov</i>	27
3.1. Magnitud de la solución del problema (3.8) en función del autovalor. . .	33
3.2. División del dominio espacial en elementos triangulares.	34
3.3. Elementos triangulares P_K con diferente número de nodos o grados de libertad.	36

4.1. Actualización de perfiles desde el tiempo t_n al t_{n+1} , debido a la difusión magnética y a un modelo para el transporte cinético. Una primera aproximación consiste en suponer que la geometría espacial de la configuración se especifica <i>a priori</i> y se mantiene constante.	42
4.2. Evolución difusiva del mapeo de flujos magnéticos $\Psi(\rho)$. La difusión magnética desplaza los contornos de flujo poloidal mientras que los contornos de flujo toroidal se mantienen aproximadamente inmóviles. . . .	46
4.3. Avance temporal de los perfiles del plasma incluyendo un esquema de cálculo del equilibrio que permite actualizar la geometría de la configuración	47
4.4. Usando el mapeo aproximado de flujos y la ec. (4.19), es posible construir un método iterativo para obtener equilibrios con perfiles magnéticos y cinéticos preestablecidos.	49
5.1. Comparación entre los perfiles de q de las autofunciones y los modificados para representar escenarios de operación.	52
5.2. Comparación entre los perfiles de p de las autofunciones y los impuestos.	53
5.3. Primeras cuatro iteraciones para la aproximación de equilibrios, con 300 puntos en la frontera.	53
5.4. Error en la estimación de q	54
5.5. Densidad de corriente alineada al campo en la solución encontrada en la iteración $j = 20$	55
5.6. Corriente toroidal y factor Beta en función del número de iteraciones. En línea punteada se marcan los valores de la tabla 5.1	56
5.7. Separatriz del reactor D3D.	57
5.8. Evolución temporal de la descarga.	58
5.9. Comportamiento anómalo de la aproximación de q en la región central. En rojo se marca el resultado obtenido y en negro el q dato.	59
5.10. Valor de Beta y corriente toroidal	60
5.11. Error relativo en q para $\Delta n = 10, 20$ y 50 pasos difusivos.	60
5.12. Perfiles de q para $\Delta n = 50$. En rojo se marca el resultado obtenido y en negro el q dato.	61
5.13. Evolución de la corriente toroidal y del factor β	62

Índice de tablas

1.1. Parámetros del reactor del proyecto ITER. Los valores entre paréntesis son alcanzables limitando la duración del pulso [1].	8
5.1. Valores de campo, corriente y β de distintos escenarios de operación previstos para ITER. Datos obtenidos de [2].	52
5.2. Tiempos de cómputo para los distintos j y Δn	61

Resumen

El tokamak es un dispositivo toroidal diseñado para confinar magnéticamente un plasma de alta temperatura con el objetivo de obtener energía de la fusión de núcleos livianos, siendo considerado el mayor candidato a convertirse en el primer tipo de reactor de fusión nuclear viable. Dentro del plasma, las líneas de campo magnético forman superficies magnéticas cerradas, que pueden ser identificadas por su cantidad de flujo magnético. En este sentido, la ecuación de Grad-Shafranov permite calcular la posición de estas superficies junto con su cantidad de flujo magnético poloidal en la condición de equilibrio de fuerzas MHD. Esta última es una ecuación elíptica de segundo orden en general no lineal. El enfoque de esta tesis es desarrollar un método que permita el cálculo del término no lineal de la ecuación de Grad-Shafranov partiendo de la información de los perfiles del factor de seguridad q y de presión, con el objetivo último de poder acoplar la resolución del equilibrio de fuerzas MHD con códigos que resuelven las ecuaciones de los procesos de transporte.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: En el capítulo 1 introducimos algunos conceptos de fusión nuclear y presentamos a los reactores tipo Tokamak junto con el modelo MHD ideal. Luego, en el capítulo 2, desarrollamos y discutimos la ecuación de Grad-Shafranov y presentamos algunas figuras de mérito de interés. En el capítulo 3 introducimos el formalismo de elementos finitos implementado a la resolución de la ecuación de Grad-Shafranov. Posteriormente, en el capítulo 4, introducimos el formalismo de coordenadas de flujo y desarrollamos un método que permite estimar el término de la derecha de la ecuación de Grad-Shafranov partiendo de la información típica provista por los códigos de transporte. Este mismo método puede ser utilizado para estimar equilibrios con perfiles de q y p prescritos. Finalmente, en el capítulo 5, implementamos el método para encontrar equilibrios representativos de escenarios de operación previstos para el reactor ITER, y reproducimos la evolución de la condición de equilibrio en una simulación de difusión magnética en el reactor D3D.

Palabras clave: FUSIÓN NUCLEAR, CONFINAMIENTO MAGNÉTICO, TOKAMAK, PLASMA, MAGNETOHIDRODINÁMICA, ELEMENTOS FINITOS

Abstract

The tokamak is a toroidal magnetic confinement device designed to obtain nuclear fusion energy from an hydrogen or helium plasma, and is considered to be the best candidate for becoming the first viable nuclear fusion reactor. The magnetic field lines inside the tokamak form closed surfaces, which can be labeled by the ammount of magnetic flux within them. In this sense, the Grad-Shafranov equation allows as to obtain the geometry of such surfaces in MHD equilibria, as well as their ammount of poloidal flux. This is a generally non-linear second order hyperbolic equation. The focus of this thesis is to develop a method capable of obtaining the non-linear term of the Grad-Shafranov equation from the safety factor (q) and pressure profiles, with the final goal of coupling the MHD force equilibrium with the magnetic difussion equation.

This thesis is organized as follows: In the first chapter we introduce some nuclear fusion concepts and we present the Tokamak reactors as well as the MHD model. In chapter 2, we obtain and discuss the Grad-Shafranov equation and present some merit figures of interest. Then, in chapter 3, we introduce the formalism for implementing the solution of the Grad-Shafranov equation using the finite element method. In chapter 4 we introduce the flux coordinate formalism and develop a method that allows us to guess the RHS of the Grad-Shafranov equation with the information provided from transport codes. This method can be also implemented to guess equilibria from given q and p profiles. Finally, in chapter 5, we implement the method to find equilibriums that are representative of ITER's predicted operational scenarios, and we reproduce the evolution of a plasma in a magnetic difussion simulation in the D3D reactor.

Keywords: NUCLEAR FUSION, MAGNETIC CONFINEMENT, TOKAMAK, PLASMA, MAGNETOHYDRODYNAMICS, FINITE ELEMENTS

Capítulo 1

Introducción

“One Ring to rule them all, One Ring to find them, One Ring to bring them all and in the darkness bind them.”

— Sauron.

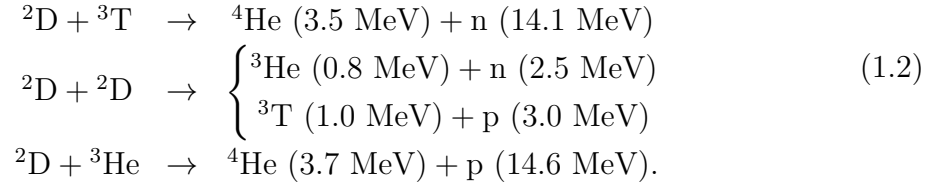
Como su nombre lo indica, un reactor de fusión nuclear busca obtener energía de la fusión entre núcleos de átomos. Para esto es necesario que la reacción sea exoérgica, lo cual solo ocurre para átomos de bajo Z . Además, estas reacciones requieren de colisiones de alta energía entre los reactivos. Al tomar estas consideraciones, llegamos a la conclusión de que un reactor de fusión debe ser capaz de confinar un plasma de isótopos de H y/o He a millones de K. Una de las formas mas atractivas de lograr este confinamiento es mediante campos magnéticos. Introducimos el modelo MHD ideal (magnetohidrodinámico ideal) para modelar el comportamiento de los plasmas de fusión.

1.1. Fusión nuclear

Dados dos reactivos con densidades n_1 y n_2 , la tasa de reacciones de fusión por unidad de volumen está dada por

$$f = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle, \quad (1.1)$$

donde $\langle \sigma v \rangle$ σ es la *reactividad*, definida como el promedio entre la sección eficaz σ de la reacción y la velocidad v de los reactivos. Como la reactividad depende fuertemente de la temperatura, buscamos reactivos que tengan una reactividad alta a temperaturas relativamente bajas. En este sentido, las tres reacciones de fusión de mayor interés son



La figura 1.1 muestra la reactividad en función de la temperatura en K y en KeV ¹ de estas tres reacciones.

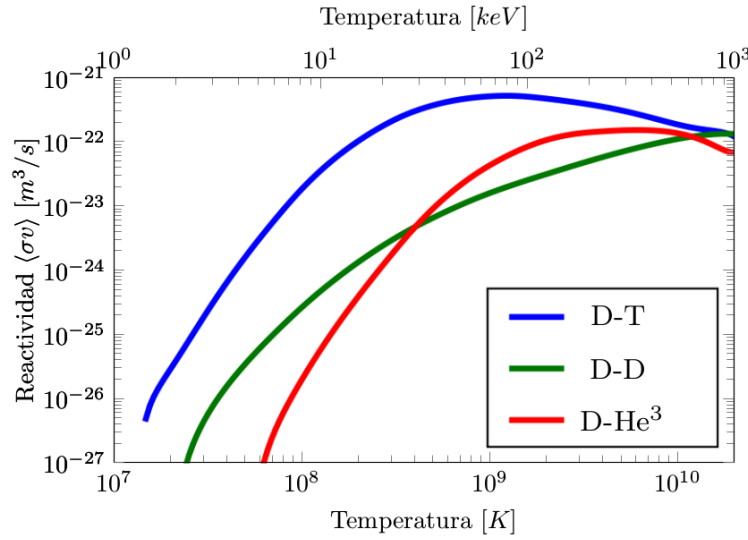


Figura 1.1: Reactividad en función de la temperatura para distintas reacciones de fusión.

Como podemos ver, los desafíos que se plantean para el diseño de un reactor de fusión son diversos, variando desde la obtención o producción del combustible hasta el manejo de los productos de fusión. Entre ellos, el que mayor impacta en el diseño de un potencial reactor es la alta energía por partícula necesaria. Una consecuencia directa es que, puesto que esta energía es ordenes de magnitud mayor a la energía de ionización, el combustible se encuentra necesariamente en estado de plasma.

La forma mas eficiente de lograr fusión nuclear sostenida consiste en confinar el combustible a temperaturas del orden de los (1 – 10) keV y densidades de partículas del orden de 10^{20} cm^{-3} . En estas condiciones, existe una cantidad relativamente alta de partículas dentro de la distribución de velocidades con la energía necesaria para participar en eventos de fusión. Nótese que la mayor parte de las partículas tienen una energía *menor* que aquella para la cual la reactividad es máxima, y solo la fracción de partículas con mayor energía participa en las reacciones de fusión.

¹Utilizamos el producto $K_B T$ para expresar la temperatura, con K_B la constante de Boltzmann; 1 eV equivale aproximadamente a 11600 K.

1.1.1. Potencia de fusión

Para determinar las características que debe tener un reactor de fusión necesitamos conocer que factores afectan la potencia que genera. Si suponemos un combustible con densidad $n = n_1 + n_2$, con n_1 y n_2 las densidades de partículas de los elementos 1 y 2 a fusionar, la potencia de fusión por unidad de volumen es

$$P_{\text{fus}} = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle E_{\text{fus}}, \quad (1.3)$$

donde E_{fus} la energía liberada en cada reacción de fusión. La potencia máxima se alcanza cuando $n_1 = n_2 = n/2$, con lo que la dependencia en densidad de P_{fus} se reduce a

$$P_{\text{fus}} = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle E_{\text{fus}}. \quad (1.4)$$

En el rango de temperaturas en el que se espera que operen los reactores de fusión, la tasa de reacción depende cuadráticamente con la temperatura del plasma. Esto permite obtener la dependencia entre la potencia de fusión y la presión p del plasma:

$$P_{\text{fus}} \sim n^2 T^2 \sim p^2. \quad (1.5)$$

Esta presión debe ser compensada mediante el método de confinamiento, lo cual presenta una dificultad adicional por sus valores típicos de varias decenas de atmósferas.

Otro aspecto limitante en un reactor de fusión es lo que se conoce como tiempo de confinamiento τ_E . Esta es una medida de la tasa a la que el plasma pierde calor hacia el medio, y se define mediante la relación

$$P_p = \frac{W}{\tau_E}, \quad (1.6)$$

en donde P_p ² es la potencia de pérdida de energía del reactor y W la energía del plasma de fusión. Esta pérdida es compensada parcialmente por una fracción de la potencia de fusión total, la *potencia de fusión de calentamiento* $P_{\text{fus}}^{\text{cal}}$, y por fuentes de calentamiento externo con potencia total P_H . En equilibrio las fuentes de calentamiento compensan exactamente las fuentes de pérdidas, llegándose a la relación

$$P_p = P_H + P_{\text{fus}}^{\text{cal}}. \quad (1.7)$$

En resumen, la potencia de fusión es proporcional al cuadrado del producto nT y la potencia de pérdida es inversamente proporcional a τ_E . En consecuencia, en general se busca maximizar el producto de estas tres cantidades, $nT\tau_E$, denominado *triple*

²Mientras que P_{fus} está expresado en unidades de potencia por unidad de volumen, P_p se refiere a la potencia de pérdida *total* del reactor.

producto de fusión.

Finalmente, otro factor a maximizar es el cociente entre la potencia de fusión producida por el plasma y la potencia de calentamiento externa necesaria,

$$Q \doteq \frac{P_{\text{fus}}^{\text{tot}}}{P_H}. \quad (1.8)$$

Al día de la fecha el valor máximo de Q al que se ha llegado es de 0,65. La condición $Q = \infty$ ($P_H = 0$) se conoce como *ignición* y requiere $n\tau_E T > 5 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s} \cdot \text{keV}$.

1.2. Métodos de confinamiento

Encontrar un método de confinamiento que permita mantener al plasma en una configuración estable y con buenos valores de τ_E ha demostrado ser el aspecto más difícil a la hora de construir un reactor. Para aumentar el valor de τ_E es necesario reducir los procesos de transporte dentro del plasma, ya que estos causan la disipación de energía. Además, los plasmas presentan diversos tipos de inestabilidades que pueden ser difíciles de evitar desde el punto de vista ingenieril. Estas inestabilidades no necesariamente son destructivas, pero pueden llevar a que el plasma adopte una configuración con parámetros de transporte no deseados.

Existen tres métodos principales de confinamiento de plasma:

- **Confinamiento gravitatorio:** Presente en el núcleo de las estrellas; es estable pero ineficiente e imposible de aplicar en escala terrestre.
- **Confinamiento inercial:** Se irradia un plasma con lasers desde distintas direcciones, calentándolo y confinándolo por presión de radiación. Su mayor problema son las inestabilidades de Rayleigh-Taylor.
- **Confinamiento magnético:** Se mantiene al plasma confinado en una región del espacio mediante campos magnéticos, aprovechando su condición de fluido conductor. Ya que las partículas del plasma describen órbitas alrededor de las líneas de campo, se limitan los fenómenos de transporte perpendiculares a dichas líneas. Suelen presentar inestabilidades a corrientes eléctricas o presiones elevadas.

Estamos interesados en los métodos de confinamiento magnético. En ellos, las líneas de campo forman un conjunto de superficies magnéticas anidadas alrededor de un eje. La última superficie magnética que se cierra sobre sí misma sin tocar las paredes internas del recipiente se denomina *separatriz*. Este tipo de confinamiento puede lograrse utilizando configuraciones cilíndricas o toroidales. Si bien las primeras son más fáciles de construir, presentan problemas de pérdidas de partículas en los extremos que las hacen poco atractivas.

Este trabajo se centra en el estudio numérico mediante elementos finitos de equilibrios magnetohidrodinámicos (MHD) en dispositivos de confinamiento magnético de tipo *Tokamak*, los cuales tienen forma toroidal.

Uno de los reactores que nos interesa es el del proyecto ITER, actualmente en construcción. ITER es una colaboración internacional que busca demostrar la factibilidad del uso de la fusión nuclear como fuente de energía, y podría conducir a que los Tokamaks se conviertan en los primeros reactores de fusión comerciales de la historia.

En las secciones siguientes se describe la configuración Tokamak con mayor detalle, así como los parámetros del proyecto ITER, mientras que en el capítulo siguiente se presentan el modelo MHD y las ecuaciones a resolver para calcular equilibrios.

1.2.1. Tokamaks

Los Tokamaks son dispositivos de confinamiento magnético toroidales de relación de aspecto $A = R_0/a \sim 3 - 4$, con R_0 el radio mayor del toroide y a el radio menor. Distinguimos dos direcciones principales, una *toroidal* y otra *poloidal*, representadas en la figura 1.2. En un Tokamak, el campo magnético apunta principalmente en la dirección toroidal, siendo generado tanto por corrientes externas como internas al plasma [3].

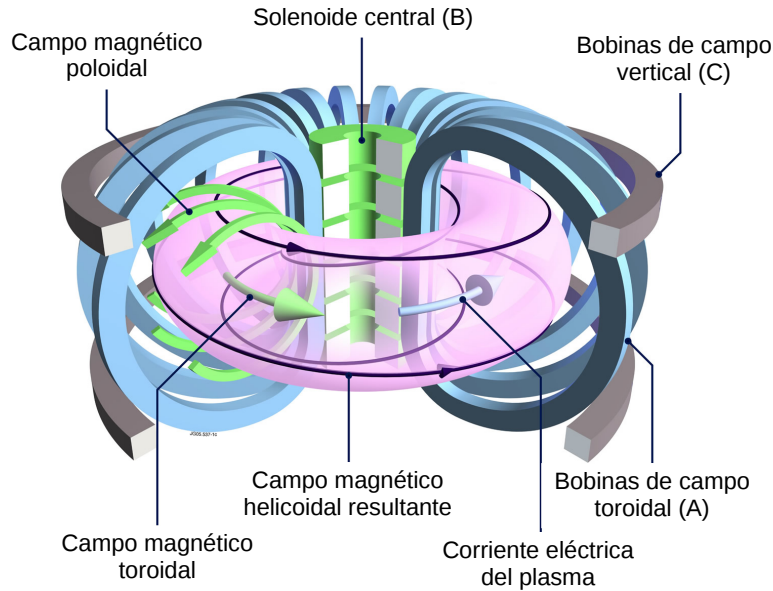


Figura 1.2: Esquema de un tokamak de sección circular.

La mayor contribución al campo magnético toroidal proviene de un sistema de bobinas que rodean al plasma, marcadas con la letra A en la figura. Un solenoide central, marcado con la letra B, se utiliza para inducir una corriente eléctrica toroidal en el plasma mediante una variación de flujo magnético. En este sentido, el plasma actúa como el secundario de un transformador. La corriente eléctrica toroidal generada

calienta el plasma por disipación óhmica y genera el campo magnético poloidal. Por último, se utiliza un sistema de bobinas paralelas al Tokamak, marcadas con la letra C, para controlar la posición del plasma, limitar su expansión, y guiar partículas que se escapan de la configuración hacia una región donde se las extrae, denominada divertor. Dicho divertor suele estar ubicado en la parte inferior del reactor.

Las líneas de campo magnético describen así trayectorias helicoidales alrededor del toroide, formando superficies magnéticas anidadas alrededor de un eje magnético. Cabe aclarar que el eje magnético no necesariamente es el eje geométrico de la configuración, y en general se encuentra desplazado hacia el exterior del toroide. Definimos entonces al campo magnético poloidal como la componente *no toroidal* del campo.

Si bien las secciones transversales de la separatriz de los primeros tokamaks eran circulares, esta forma ha variado a lo largo del tiempo. En la actualidad, la separatriz de la mayor parte de los tókamaks tiene forma de *D*.

1.2.2. Otras configuraciones toroidales

En los tokamaks, el campo magnético poloidal es generado por corrientes internas dentro del plasma. Existen otras configuraciones toroidales en las cuales esto también sucede, de las cuales destacamos dos: *Spheromak* y *Reversed Field Pinch*.

- **RFP (por Reversed Field Pinch).** También es axisimétrico y toroidal, con relación de aspecto generalmente mayor que la del tokamak. La intensidad de los campos poloidal y toroidal es aproximadamente igual, lo que hace que la configuración sea más susceptible a inestabilidades. El RFP también actúa como secundario de un transformador (para la generación de la corriente toroidal), y posee bobinas para el campo toroidal, de menor tamaño que las del tokamak. El campo toroidal se invierte (cambia de signo) cerca de la separatriz (de ahí su nombre) como resultado de un proceso espontáneo de relajación magnética y auto-organización producido por la evolución de ciertas inestabilidades MHD. Precisamente la existencia de esas inestabilidades hace que el confinamiento no sea tan bueno como el de los Tokamaks. En los últimos años se demostró que si la corriente poloidal se produce externamente, el plasma desarrolla un menor nivel de fluctuaciones y el confinamiento mejora notablemente, haciéndose semejante al de los Tokamaks de igual tamaño [Sarff 97].
- **Spheromak.** Pertenece a la familia de los toroides compactos. Estas son configuraciones magnéticas toroidales formadas en el interior de una cámara simplemente conexa. La ausencia de elementos (bobinas, componentes estructurales, etc.) concatenando el plasma presenta una serie de ventajas, entre las que se destaca la sencillez constructiva, lo que podría resultar en reactores más económicos y

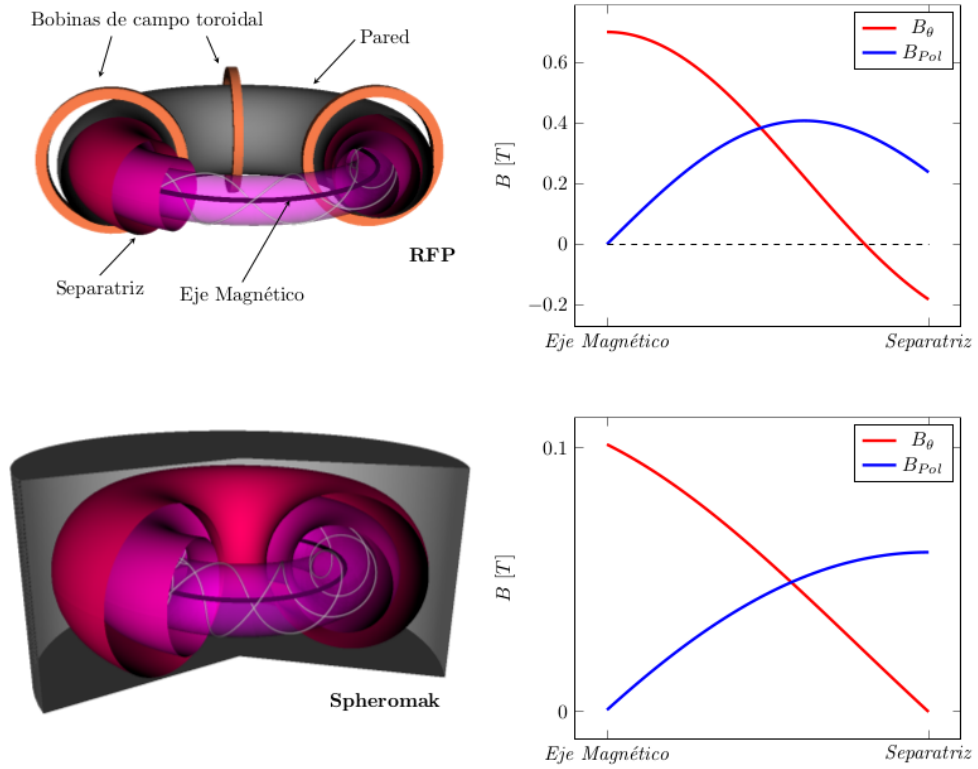


Figura 1.3: Configuraciones RFP y Spheromak. A la derecha se muestran los campos toroidales y poloidales desde el eje magnético hasta la separatriz.

compactos. En los spheromaks ambas componentes de campo se producen por corrientes que circulan dentro del plasma y tienen la misma magnitud. Debido a la falta de “agujero” central no es posible utilizar campos eléctricos inductivos para formar y sostener la configuración. Esta configuración se forma como resultado de un proceso de relajación y auto-organización semejante al que ocurre en los RFP’s.

1.2.3. Proyecto ITER

ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) es un proyecto internacional de gran complejidad ideado en 1986. Busca probar todos los elementos necesarios para la construcción y funcionamiento de un reactor de fusión nuclear comercial, con el objetivo de demostrar la factibilidad científica y tecnológica de la fusión nuclear como fuente de energía.

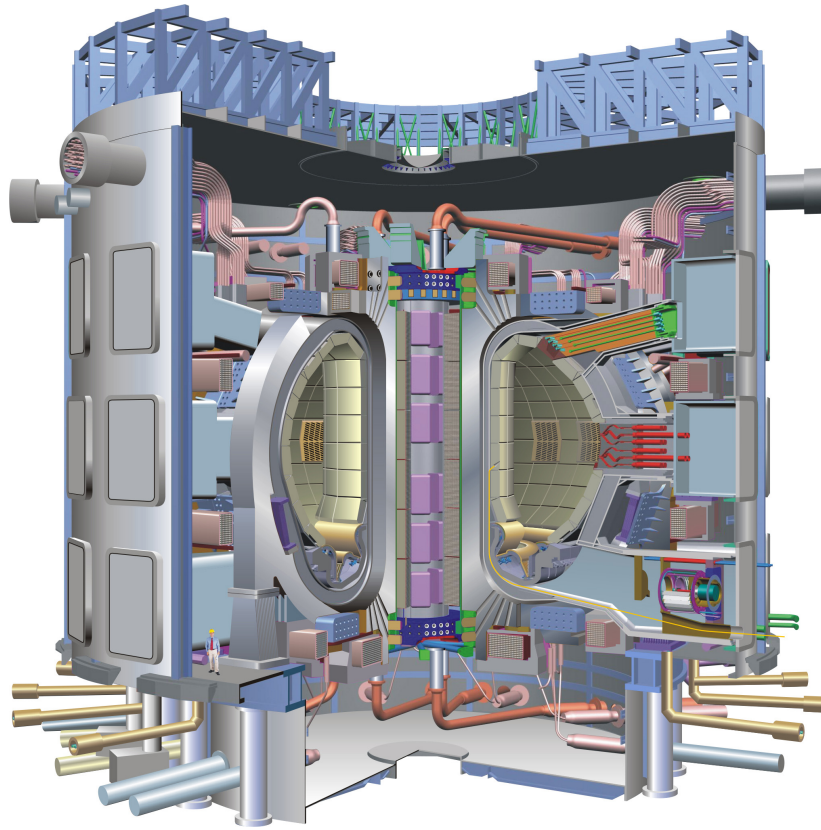


Figura 1.4: Esquema del reactor de ITER, actualmente en construcción.

Parámetro	Valor
Potencia de fusión	500 MW (700 MW)
Ganancia (Q)	5 – 20
Radio mayor del plasma (R_0)	6.2 m
Radio menor del plasma (a)	2.0 m
Elongación vertical (κ)	1.70/1.85
Triangularidad (δ)	0.33/0.48
Corriente del plasma ($I_p \sim I_{tor}$)	15 MA (17 MA)
factor de seguridad q_{95}	3 (a $I_p = 15$ MA)
Campo toroidal en $r = R_0$	5.3 T
Potencia de calentamiento auxiliar	73 MW (110 MW)
Volumen del plasma	830 m ³
Área de la superficie del plasma	680 m ²
Área de la sección transversal	22 m ²

Tabla 1.1: Parámetros del reactor del proyecto ITER. Los valores entre paréntesis son alcanzables limitando la duración del pulso [1].

El reactor, aún en construcción, funcionará a una presión de 0,7 MPa utilizando una combinación $D - T$ como combustible. Se espera que sea capaz de producir 500MW

de potencia de fusión con una ganancia en el rango de $Q \sim 5 - 20$. Este rango de Q corresponde a una fracción de calentamiento debido a partículas alfa f_α de entre un 50 y 80 %, adecuado para el estudio de la física de plasmas auto-sostenidos de alto f_α , que será necesario para los futuros reactores Tokamak de generación de potencia. Incorpora imanes superconductores, un divertor refrigerado con agua, una pared de tungsteno en contacto con el plasma y un blindaje que es térmica y magnéticamente capaz de soportar largos pulsos de operación (de hasta 7 min o más). En la tabla 1.1 se muestran los parámetros que se espera que tenga el reactor [1], mientras que en la figura 1.4 se muestra un corte transversal de este.

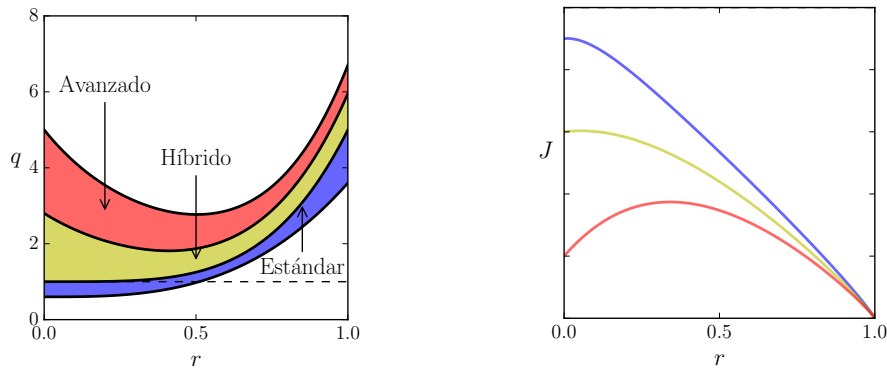
1.3. Escenarios de operación

La meta principal del área de investigación en fusión nuclear es desarrollar un reactor de operación estacionaria. Los parámetros necesarios para esto son los siguientes: baja corriente para minimizar la necesidad de inducirla con fuentes externas, alto confinamiento para maximizar los productos de fusión, y alta presión para maximizar la fracción de corriente de *bootstrap* (una fuente de corriente no inductiva). El objetivo final es desarrollar un reactor que no necesite de fuentes inductivas externas durante su operación.

En este sentido, uno de los parámetros más importantes en el desarrollo de escenarios avanzados es el perfil de corriente. Este perfil está relacionado localmente con el gradiente del *factor de seguridad* q , que representa el número de vueltas toroidales que da una línea de campo por cada vuelta poloidal (volveremos sobre este factor en la sección 2.2). Como la forma del perfil de corriente (y por tanto del perfil de q) determina la mayoría de las propiedades de estabilidad del plasma, en los últimos años ha habido un gran esfuerzo por controlar estos perfiles, en particular para evitar inestabilidades del modelo MHD (el cual describiremos en la sección siguiente). Un ejemplo de esto es la inestabilidad *diente de sierra*, que se manifiesta como una reorganización periódica del plasma donde $q < 1$.

Existen distintos escenarios previstos para la operación del reactor ITER, los cuales se pueden clasificar principalmente en Estándar, Híbrido y Avanzado (ver figs. 1.5a y 1.5b)[1].

- **Escenarios Estándar:** El escenario inductivo estándar de confinamiento de modo H (alto confinamiento) es el escenario más prometedor para alcanzar $Q = 10$ en ITER. Está caracterizado por un perfil de corriente principalmente inductivo con un máximo en la región del eje magnético, así como un perfil de q monótonamente creciente con una superficie de $q = 1$. Las desventajas de este escenario son que es de operación pulsada (por la necesidad de inducir corriente) y que



(a) Perfiles de q esperados para el proyecto ITER. (b) Perfiles de corriente esquemáticos.

Figura 1.5: Escenarios de operación

es propenso a inestabilidades MHD, principalmente diente de sierra, las cuales pueden causar disrupciones en el plasma y dañar el reactor significativamente.

■ Escenarios híbridos avanzados:

En estos escenarios el gradiente del factor de seguridad es bajo en la región central del plasma, lo que se conoce como *bajo shear*, y el valor de q en el eje magnético es cercano y mayor que 1. Estos escenarios son grandes candidatos para alcanzar una operación cuasi estacionaria, con descargas de duración larga (> 1000 s) y $Q > 5$. La ausencia de una superficie de $q = 1$ evita por completo la inestabilidad de diente de sierra, pero aún así este escenario sigue siendo propenso a otras inestabilidades MHD. La corriente de plasma en aquí es más baja en la región central que en los escenarios estándar pero más alta que en los de operación estacionaria.

- **Escenarios avanzados:** La corriente de estos escenarios es generada en más de un 50 % de manera no inductiva. El perfil de q se invierte en el centro, en lo que se conoce como *shear invertido*, dando lugar a una barrera de transporte interna (ITB, una región en la que los fenómenos de transporte se ven reducidos). La reducción de los fenómenos de transporte aumenta el gradiente de presión, la cual puede generar una corriente de *bootstrap* que, junto con otros mecanismos no inductivos, pueden sostener hasta un 100 % de la corriente total. En configuraciones con *shear* altamente invertido se han alcanzado descargas estacionarias de larga duración con baja corriente en el eje magnético. Sin embargo, estas descargas presentan problemas tales como baja producción de fusión nuclear debido a la baja corriente, acumulación de impurezas, y bajo confinamiento de partículas alfa que aumentan la difusión y la deposición de energía fuera de la ITB.

1.4. Modelo MHD

En el modelo MHD se describe el comportamiento macroscópico del plasma como el de un fluido conductor. Se obtiene como una reducción del modelo de dos fluidos que considera el comportamiento de los electrones y los iones por separado [4]. Las escalas de longitud y tiempo del modelo MHD son del orden del radio a del plasma y del tiempo de traslación térmico de los iones a través del plasma ($\tau \approx a/v_{Ti}$) respectivamente.

Las aproximaciones más importantes del modelo son:

- Masa despreciable de los electrones ($m_e = 0$). Esto se debe a que por su baja masa sus tiempos de respuesta son mucho más cortos que τ y su contribución es despreciable en la ecuación de momento.
- $\nabla \cdot \mathbf{E}$ despreciable en la ecuación de poisson, lo cual conduce a la condición de cuasineutralidad: $n_e \approx Zn_i$, con n_i y n_e las densidades iónicas y electrónicas respectivamente. Se deriva de que $a \gg \lambda_{De}$, con λ_{De} la distancia típica de apantallamiento de variaciones locales de carga.
- Corriente de desplazamiento despreciable ($\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$). Se deriva de considerar que la velocidad térmica de los iones no es relativista ($v_{Ti} \ll c$).

Si además se asume que el plasma es un conductor perfecto, se obtiene el conjunto de ecuaciones (1.9):

$$\begin{aligned}
 \text{Conservación de la masa:} \quad & \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\
 \text{Conservación de momento:} \quad & \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \\
 \text{Conservación de energía:} \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \\
 \text{Ley de Ohm:} \quad & \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \\
 \text{Ecuaciones de Maxwell:} \quad & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\
 & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

En este sistema, ρ es la densidad de masa del plasma, \mathbf{v} la velocidad del fluido, p la presión y \mathbf{J} la densidad de corriente eléctrica.

Existe una variedad de inestabilidades en el modelo MHD ideal que pueden afectar el confinamiento de un plasma. Estas inestabilidades no desaparecen si se expande el modelo para considerar efectos microscópicos. Además, si bien el agregado de resistividad del modelo aumentaría la disipación de energía, esta disipación solo ralentizaría la evolución de dichas inestabilidades sin eliminarlas. Por estas razones, existe un consenso general de que para que una configuración de plasma sea estable, debe serlo en el modelo MHD ideal. Es en este contexto que el modelo MHD ideal sirve como punto de partida para el estudio de todo dispositivo de confinamiento de plasmas.

1.5. Equilibrio de fuerzas

En muchas situaciones, particularmente en las que consideramos en el capítulo 4, podemos considerar que $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$ y el plasma está en *equilibrio*. En esta situación, el balance de fuerzas queda determinado por la ecuación de momento, la cual se reduce a

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (1.10)$$

Esta ecuación puede ser reescrita tomando en cuenta la simetría toroidal del Tokamak como una ecuación diferencial elíptica de segundo orden, tema que trataremos en la sección siguiente. Nuestra motivación yace en que en muchas aplicaciones es necesario disponer de un cálculo del equilibrio, particularmente para resolver de forma adecuada la ecuación de transporte.

Capítulo 2

Equilibrio MHD axisimétrico

“Donuts. Is there anything they can’t do?”

— Matt Groening. *The Simpsons*

En el capítulo anterior introdujimos el modelo MHD y la condición de equilibrio estático de fuerzas, ec. (1.10). El tratamiento de esta ecuación vectorial se simplifica aprovechando la simetría toroidal del problema. En particular, es posible describir el equilibrio del plasma en términos de una única función espacial (la función de flujo poloidal) y dos funciones escalares que determinan la presión y la componente toroidal del campo magnético. La condición de equilibrio (1.10) expresada en términos de estas tres funciones se conoce como ecuación de Grad-Shafranov. En este capítulo presentamos esta formulación del problema del equilibrio MHD para configuraciones axisimétricas en términos de la ecuación de Grad-Shafranov.

2.1. Ecuación de Grad-Shafranov

Dado que la configuración magnética en un tokamak tiene, en principio, simetría de revolución, trabajaremos en un sistema de coordenadas cilíndrico (R, ϕ, Z) . Buscamos soluciones axisimétricas, es decir, que satisfagan

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0. \quad (2.1)$$

El campo magnético \mathbf{B} puede ser escrito como el rotor del potencial vector,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.2)$$

y utilizando (2.1) podemos reescribir (2.2) como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \left(A_\phi \hat{\phi} \right) + \left(\frac{\partial A_R}{\partial Z} - \frac{\partial A_Z}{\partial R} \right) \hat{\phi}, \quad (2.3)$$

donde $\hat{\phi}$ es el versor en dirección de ϕ . Definimos dos nuevas variables, la *función de flujo poloidal* Ψ y la *función de campo toroidal* F

$$\Psi(R, Z) = -RA_\phi, \quad (2.4)$$

$$F(R, Z) = R \left(\frac{\partial A_R}{\partial Z} - \frac{\partial A_Z}{\partial R} \right) = RB_\phi. \quad (2.5)$$

Ambas son funciones escalares dependientes de R y Z . Utilizando que el gradiente de la coordenada ϕ es

$$\nabla \phi = \frac{1}{R} \hat{\phi}, \quad (2.6)$$

la ecuación (2.3) puede ser expresada de la forma

$$\mathbf{B} = \nabla \Psi \times \nabla \phi(R, Z) + F(R, Z) \nabla \phi. \quad (2.7)$$

De esta forma, aprovechamos la simetría para representar el campo magnético en términos de dos funciones escalares. Notar que el primer término corresponde a la componente poloidal del campo magnético y que Ψ actúa como su *función corriente*. Efectivamente, los contornos de Ψ coinciden con las líneas de campo poloidal, como se discute en la próxima sección.

La densidad de corriente eléctrica puede obtenerse calculando el rotor de \mathbf{B} en la ecuación (2.7), de donde obtenemos

$$\mu_0 \mathbf{J} = \Delta^* \Psi \nabla \phi + \nabla F \times \nabla \phi. \quad (2.8)$$

Aquí hemos introducido el operador de Grad-Shafranov, un operador elíptico de segundo orden definido como

$$\Delta^* \Psi \equiv R^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{R^2} \nabla \Psi \right) = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}. \quad (2.9)$$

Reemplazando \mathbf{B} por (2.7) y \mathbf{J} por (2.8) en la condición de equilibrio (1.10) obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: P , F y Ψ . Para desacoplar estas ecuaciones tomamos el producto punto de la ecuación (1.10) con los vectores $\nabla \phi$, \mathbf{B} y $\nabla \Psi$. En este orden, obtenemos las ecuaciones

$$\nabla F \times \nabla \Psi = 0 \rightarrow F = F(\Psi) \quad (2.10)$$

$$\nabla P \times \nabla \Psi = 0 \rightarrow P = P(\Psi) \quad (2.11)$$

$$\Delta^* \Psi = \mu_0 R J_\phi = -\mu_0 R^2 \frac{dP}{d\Psi} - F \frac{dF}{d\Psi}. \quad (2.12)$$

De modo que, en equilibrio, tanto la presión del plasma como la función de campo toroidal dependen de una única variable, Ψ . A su vez, las tres funciones escalares $\Psi(R, Z)$, $P(\Psi)$ y $F(\Psi)$ están relacionadas por la *ecuación de Grad-Shafranov*, ec. (2.12). Notar que la dependencia de P y F respecto de Ψ no está especificada por el equilibrio; por el contrario, el equilibrio MHD del plasma queda determinado en términos de la ecuación de Grad-Shafranov una vez especificadas estas dos funciones arbitrarias. La forma de estos perfiles está determinada por los mecanismos de transporte de masa, momento y energía y la difusión resistiva del campo magnético, y requieren un nivel de descripción del plasma más completo que el incluido en el modelo MHD [5].

Una vez prescrita la dependencia funcional de P y F con Ψ , se deben imponer las condiciones de contorno sobre Ψ para incluir el efecto de las corrientes que circulan por las bobinas externas. Impuestas estas las condiciones, la ecuación de Grad-Shafranov se convierte en un problema diferencial, en general no lineal. A continuación se discute la interpretación física de Ψ y las superficies de flujo, y más adelante se describe la formulación del problema del equilibrio, incluyendo las condiciones de contorno.

2.1.1. Interpretación de Ψ y superficies de flujo

En el interior del plasma, los contornos de $\Psi = \text{constante}$ son cerrados y forman superficies anidadas alrededor de un eje magnético, como se muestra en la Fig. 2.1. La

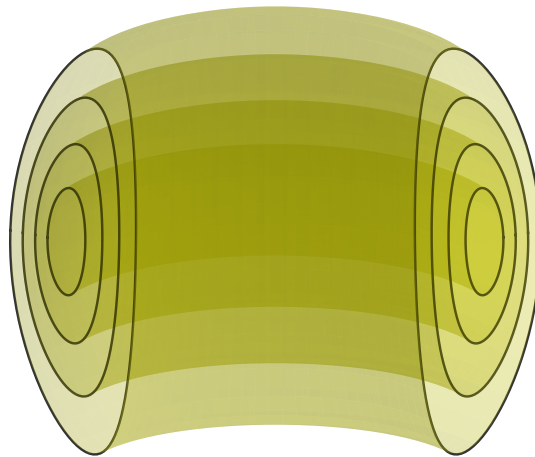


Figura 2.1: Los contornos $\Psi = \text{constante}$ determinan las superficies magnéticas sobre las que yacen las líneas de campo magnético y densidad de corriente.

función de flujo poloidal está directamente relacionada con el flujo magnético poloidal

(fig 2.2) definido como

$$\Psi_P(R, Z) = 2\pi \int_0^R B_Z(r, Z) r dr. \quad (2.13)$$

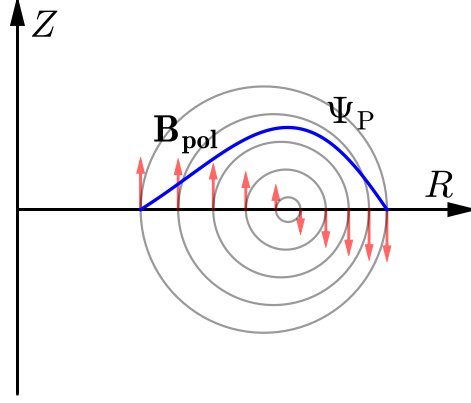


Figura 2.2: Esquema del flujo magnético poloidal.

Expresando el campo vertical en términos de la función de flujo poloidal obtenemos

$$B_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \Rightarrow \Psi_P(R, Z) = 2\pi (\Psi(R, Z) - \Psi(0, Z)), \quad (2.14)$$

por lo que la función de flujo Ψ corresponde al *flujo magnético poloidal por radian* contenido en cada superficie magnética.

De la ec. (2.11) queda claro que la presión del plasma es constante en cada superficie de flujo, es decir, sólo varía de una superficie a otra. Por este motivo se dice que la presión es una *variable o cantidad de flujo*. Sucede que muchas de las variables de interés para los dispositivos de confinamiento magnético son variables de este tipo y constituyen una herramienta fundamental para el análisis, como se detalla más adelante.

Partiendo de las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.10) puede verse que

$$\nabla \Psi \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.15)$$

y

$$\nabla \Psi \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.16)$$

por lo que las líneas de campo de \mathbf{B} y \mathbf{J} yacen sobre las superficies de $\Psi = \text{constante}$. Como no hay líneas que la atraviesen, el contenido de flujo magnético, tanto poloidal como toroidal, es constante en cada superficie. Lo mismo ocurre con la corriente eléctrica.

ca. Notar que a pesar de recorrer las mismas superficies, las líneas de campo no son paralelas a las de densidad de corriente, siempre que exista un gradiente de presión, como lo indica la ec. (1.10).

En virtud de lo expuesto, vemos que en una configuración toroidal la condición de equilibrio MHD *ordena* al plasma en una estructura de capas concéntricas, que son la superficies de flujo mostradas en la Fig. 2.1. Esto se puede lograr en un experimento siempre que el equilibrio sea estable ante perturbaciones. Por eso, la estabilidad MHD de una configuración es un requerimiento fundamental.

2.1.2. Flujo toroidal y coordenadas de flujo

El valor de Ψ puede usarse para identificar cada una de las superficies magnéticas, desde un valor de referencia en el eje magnético, digamos Ψ_a , hasta su valor en la separatriz, Ψ_b . Como Ψ es proporcional al contenido de flujo poloidal de cada superficie, se dice que Ψ actúa como *coordenada de flujo*.

El flujo magnético toroidal contenido por la superficie Ψ se define como

$$\Phi(\Psi) = \int_{\Omega_\Psi} B_\phi dS, \quad (2.17)$$

donde Ω_Ψ es la superficie encerrada por el contorno de flujo Ψ en una posición toroidal fija ($\phi = cte$). El hecho que de cada superficie contenga una cantidad fija de flujo poloidal y toroidal se manifiesta en que Φ es sólo función de Ψ (y viceversa). Este mapeo queda completamente definido por el equilibrio, a través de las funciones $\Psi(R, Z)$ y $F(\Psi)$. Entonces, resulta evidente que también puede utilizarse el contenido de flujo toroidal para identificar las superficies magnéticas, es decir, que Φ puede actuar como coordenada de flujo.

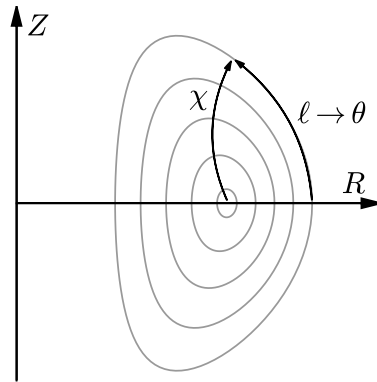


Figura 2.3: Coordenadas de flujo.

En general, es posible utilizar cualquier cantidad de superficie (o función de flujo) como coordenada de flujo. Formalmente, una variable χ es función de flujo si satisface

que

$$\nabla\chi \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.18)$$

En ese caso, χ sirve como coordenada de flujo “radial”. Para construir un sistema de coordenadas de flujo es necesario incorporar además una coordenada “poloidal” θ , de modo que sea posible establecer una relación biunívoca

$$(R, Z) \longleftrightarrow (\chi, \theta) \quad (2.19)$$

como se esquematiza en la Fig. 2.3. Para configuraciones axisimétricas la elección natural para la tercer coordenada de flujo es el ángulo toroidal ϕ , que es el mismo que en coordenadas cilíndricas.

Una elección frecuente como coordenada de flujo radial es el radio medio normalizado de cada superficie magnética, ρ , definido por medio de la siguiente expresión

$$\rho^2 = \frac{\Phi(\Psi)}{\Phi_0}, \quad (2.20)$$

donde Φ_0 es el flujo toroidal total del plasma, es decir, el contenido por la separatriz. Notar que $\rho = 0$ corresponde al eje magnético y $\rho = 1$, a la separatriz. Para obtener una coordenada con dimensiones de longitud, se puede multiplicar a ρ por el radio medio de la separatriz, en metros, que se define a partir de la siguiente ecuación,

$$\pi B_0 \rho_b^2 = \Phi_0, \quad (2.21)$$

donde B_0 es al campo toroidal de vacío producido por las bobinas (A) que concatenan al plasma (ver Fig. 1.2).

Con respecto a la coordenada de flujo angular, la opción más inmediata es el ángulo poloidal medido alrededor del eje magnético. Sin embargo, muchas veces resulta más conveniente utilizar alguna definición basada en la longitud de arco ℓ , como se sugiere en la Fig. 2.3.

2.2. Parámetros del plasma y figuras de mérito

2.2.1. Campo magnético externo

Las bobinas que rodean al plasma generan un campo magnético toroidal de vacío de magnitud

$$B_{\phi 0} = \frac{I_0}{R}, \quad (2.22)$$

donde I_0 es la corriente total que circula por las bobinas. Éste es el valor exacto de la componente toroidal del campo magnético fuera del plasma, y además es aproximada-

mente igual al campo toroidal en el interior. Caracterizamos este campo por su valor B_0 en el centro geométrico de la configuración toroidal. Así, (2.22) puede reescribirse como

$$B_{\phi 0} = \frac{R_0 B_0}{R}, \quad (2.23)$$

donde R_0 es el radio mayor de la configuración toroidal. Nótese que R_0 no se refiere a la posición del eje magnético, sino al eje geométrico de la separatriz. De igual manera, podemos expresar la función $F(R, Z)$ en el exterior del plasma como $R_0 B_0$.

2.2.2. Parámetros geométricos

Las variables características que definen la geometría de la separatriz son los radios mayores y menores R_0 y a , la elongación vertical κ y la trianguladidad δ , esquematizados en la figura 2.4.

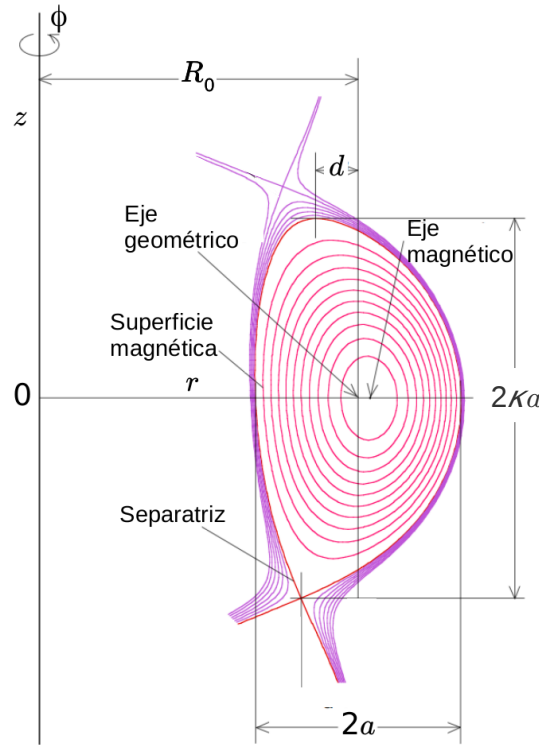


Figura 2.4: Sección transversal de un Tokamak con perfil en forma de D . La separatriz del plasma es la última superficie cerrada, y el divertor se ubica en donde esta forma una X .

El radio menor a es la mitad del ancho de la separatriz y el radio mayor R_0 la posición de su punto medio horizontal. Por su parte, la elongación vertical κ define el cociente entre el ancho y el alto de la separatriz, de forma tal que la altura total está

dada por $2\kappa a$. Por último, la triangularidad se define como la relación $\delta = d/a$, con d la distancia horizontal entre el eje geométrico y el punto de mayor altura en la separatriz.

En los casos donde busquemos resolver el equilibrio en un dominio de tipo ITER, parametrizaremos la separatriz mediante

$$\begin{aligned} R &= R_0 + a \cos(\theta + \delta \sin(\theta)) \\ Z &= a\kappa \sin(\theta), \end{aligned} \quad (2.24)$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$. En las figuras 2.5a y 2.5b se muestran distintos equilibrios con separatrices definidas por 2.24 y distintos valores de δ y κ .

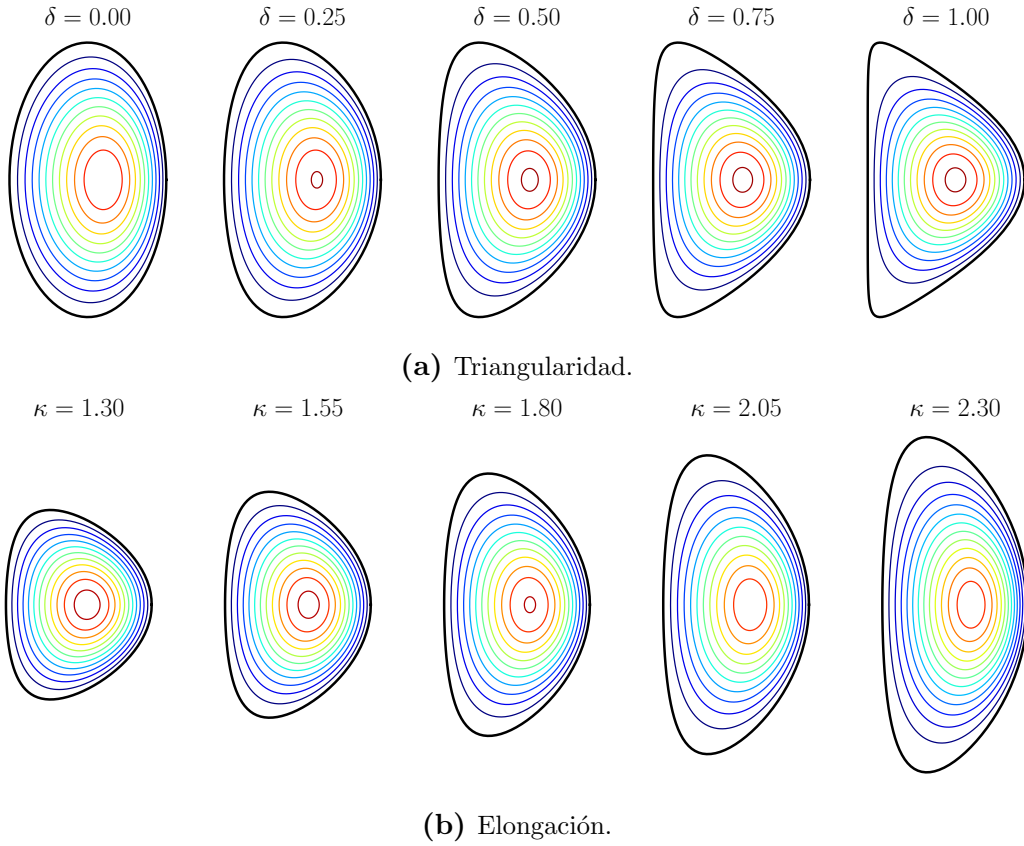


Figura 2.5: Triangularidad para $\kappa = 1,8$ y elongación para $\delta = 0,4$.

2.2.3. Figuras de mérito

Dos variables que caracterizan fuertemente a una configuración de tokamak son la presión y la helicidad de las líneas de campo. Es en este contexto que definimos dos figuras de mérito, el *factor Beta* (β) y el *factor de seguridad* (q).

Beta

El factor β es una medida de la relación entre la presión del plasma y la *presión magnética* ejercida por las líneas de campo, y está definido de manera general por el

cociente

$$\beta = \frac{p}{B^2/(2\mu_0)}. \quad (2.25)$$

Puesto que la generación del campo magnético implica uno de los mayores costos en un tokamak, es una variable que se busca maximizar. Desafortunadamente, debido a inestabilidades a valores altos de presión, los valores máximos de β alcanzables en Tokamaks son de aproximadamente 0,1.

Existen varias definiciones de β dependiendo de que aspectos de la configuración se quieran remarcar. En este trabajo se utiliza únicamente la definición

$$\beta = \frac{\frac{1}{V} \int p dV}{B_0^2/(2\mu_0)}. \quad (2.26)$$

Factor de seguridad

El factor de seguridad q es un parámetro fuertemente relacionado con la estabilidad de una configuración toroidal de plasma. Es una cantidad de superficie que puede interpretarse como la cantidad de vueltas toroidales que da una línea de campo magnético por cada vuelta en sentido poloidal.

Dos valores de q muy utilizados como referencia son q_0 y q_{95} . El primero es el valor de q en el eje magnético, mientras que el segundo es un valor de q cercano a la separatriz, concretamente en la superficie cuyo flujo magnético es un 5 % del flujo magnético en el eje. El valor de q_{95} está fuertemente relacionado con la corriente total que circula por el plasma y a la geometría de la separatriz, ya que en esa región el campo magnético toroidal es principalmente el campo de vacío y la trayectoria poloidal de las líneas de campo está dada justamente por la corriente y la geometría de la última superficie magnética cerrada. Así, un mayor valor de q_{95} implica un menor valor de corriente total.

Una forma de expresar q es como la derivada del flujo magnético toroidal respecto del flujo magnético poloidal,

$$\begin{aligned} q &= \frac{d\Phi}{d\Psi_P} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{d\Psi}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para visualizar esto consideremos la figura 2.6.

En ella marcamos dos diferenciales de superficie, uno a ϕ constante (dS_{pol}) y otro a θ constante (dS_{tor}). Si seguimos ahora la trayectoria de una única línea de campo alrededor de N vueltas poloidales, esta atravesará N veces la superficie dS_{tor} y qN veces la superficie dS_{pol} , por lo que su contribución $\delta\Phi$ sobre el flujo toroidal será q

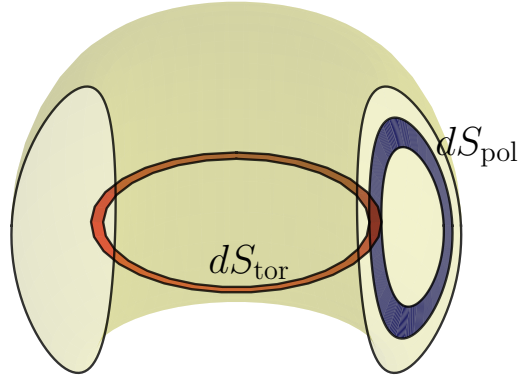


Figura 2.6: Diferenciales de flujo utilizados para el cálculo de q . Una línea de campo atraviesa q veces dS_{pol} por cada vez que atraviesa dS_{tor} .

veces su contribución sobre el flujo poloidal $\delta\Psi$. Desde aquí se sigue [2.27](#).

Experimentalmente se ha observado que las superficies con q racional pueden presentar problemas de estabilidad. Esto es particularmente cierto para las superficies con $q = 1$. Estas inestabilidades no son necesariamente destructivas de la configuración, pero pueden limitar la potencia de fusión máxima alcanzable. En Tokamaks, como el campo magnético toroidal es mayor que el poloidal, los valores de q suelen ser mayores que 1.

Otra forma en la que el valor de q afecta a la estabilidad está relacionado a su variación entre superficies de flujo. Mientras mayor sea $|\frac{dq}{dr}|$, menor será el intercambio de partículas entre superficies de flujo, mejorando la estabilidad del plasma. Aún así, existen configuraciones avanzadas donde el perfil de q tiene regiones con baja dependencia radial, que como ventaja permiten alcanzar mayores valores de β .

Es por estas razones que controlar el perfil de q es un área de gran interés. Esto puede lograrse mediante un control del perfil de corriente dentro del plasma, típicamente mediante la inyección de haces de iones.

2.2.4. Corriente total

Un último valor que caracteriza a una configuración toroidal de plasma es la corriente toroidal I_{TOR} que circula en su interior, la cual en general es del orden de los MA. Como en los tokamaks la densidad de corriente está principalmente alineada al campo, se sigue que $I_{\text{TOR}} \cong I_p$, con I_{TOR} la corriente eléctrica toroidal.

2.3. Adimensionalización y escalas de referencia

Para adimensionalizar el problema del equilibrio alcanza con definir una escala de longitud y una de campo magnético. La elección más común, y que seguimos en este trabajo, se compone por el radio menor a y el campo toroidal de vacío B_0 . A partir de estas escalas de referencia se pueden deducir las variables adimensionales siguiendo el procedimiento usual,

$$\tilde{\Psi} = \frac{\Psi}{B_0 a^2}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{B_0^2/\mu_0}, \quad \tilde{\mathbf{J}} = \frac{\mathbf{J}}{B_0/\mu_0 a}, \quad \tilde{I} = \frac{I}{B_0 a/\mu_0} \quad \text{y} \quad \tilde{F} = \frac{F}{B_0 a}. \quad (2.28)$$

A partir de este punto solo consideramos parámetros adimensionales a menos que correspondan a valores reales de operación de un tokamak, en cuyo caso se agregará el nombre del dispositivo como superíndice y se expresará en las unidades correspondientes. Por simplicidad se omitirán las tildes en las cantidades. Así por ejemplo, para el caso del perfil tipo ITER, se expresa

$$\begin{aligned} R_0^{\text{ITER}} &= 6,2 \text{ m} \quad \rightarrow \quad R_0 = 3,1 \\ a^{\text{ITER}} &= 2 \text{ m} \quad \rightarrow \quad a = 1 \\ B_0^{\text{ITER}} &= 6,2 \text{ T} \quad \rightarrow \quad B_0 = 1 \\ I_p^{\text{ITER}} &= 15 \text{ MA} \quad \rightarrow \quad I_p = 1,778. \end{aligned}$$

2.4. Formulación del problema del equilibrio

La forma espacial del plasma y la configuración magnética en equilibrio se obtienen resolviendo la ecuación de Grad-Shafranov (2.12). Para ello es necesario especificar por un lado las funciones arbitrarias $P(\Psi)$ y $F(\Psi)$, y por otro las condiciones de contorno que satisface la incógnita Ψ . En esta sección se describe la forma en que se incorpora esta información para formular un problema matemático bien planteado.

2.4.1. Condiciones de Contorno

El plasma está contenido en el interior de la separatriz. La forma y posición de la separatriz, queda determinada por la interacción de la corriente del plasma con las corrientes que circulan por las bobinas del solenoide central (B) y las bobinas de campo vertical (C) (ver Figs. 1.2 y 2.7). Dependiendo de la forma en que se trate esta interacción se pueden formular dos tipos de problemas:

- **Problema de frontera libre:** Se especifican las corrientes que circulan por las bobinas externas, los perfiles $F(\Psi)$ y $P(\Psi)$ del plasma, y se aplica (formalmente) la condición $\Psi \rightarrow 0$ en infinito. Para resolver el problema se extiende la ecuación de Grad-Shafranov más allá del plasma, para incluir las zonas de vacío, aire y

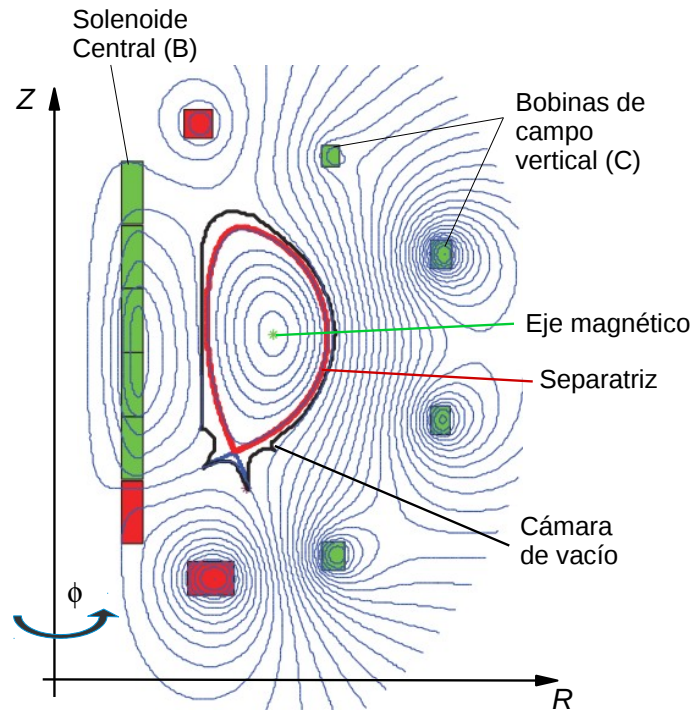


Figura 2.7: Sección poloidal de un tokamak. El plasma está limitado por la separatriz, en el interior de una cámara de vacío. La forma de la separatriz resulta del balance de fuerzas entre la distribución de la corriente toroidal en el plasma y las corrientes que circulan por las bobinas externas indicadas.

materiales ferromagnéticos [6, 7]. En este planteo del problema, la posición de la separatriz es, junto con $\Psi(R, Z)$, una incógnita a resolver. Debido a la mayor complejidad de este problema, lo común es elegir perfiles de F y P simplificados, de modo de obtener una ecuación de Grad-Shafranov lineal, o bien, con no-linealidades fáciles de tratar. Lo importante aquí es obtener una buena aproximación de la distribución espacial de la densidad de corriente en el plasma. Si bien se pierde el detalle de la estructura magnética del plasma, con este enfoque es posible obtener la posición y forma del plasma con buena precisión, y por eso es el que se utiliza habitualmente en el área de control magnético de posición y forma de la separatriz [8].

- **Problema de frontera fija:** Otro enfoque se basa en suponer que la separatriz es un dato, es decir una curva cerrada conocida *a priori* en el plano poloidal. En este caso el problema diferencial se convierte en un problema de Dirichlet. Esta es la opción usual cuando se busca analizar en forma detallada la estructura interna del plasma en equilibrio, y por tanto la más empleada para análisis de estabilidad MHD, efecto de las inestabilidades internas y para estudios de control de perfiles internos del plasma.

En esta tesis nos restringimos a problemas de frontera fija porque estamos intere-

sados en resolver con gran detalle la estructura magnética interna del plasma. Nuestro objetivo es desarrollar métodos de mapeo de flujo para hallar el equilibrio MHD a partir de distintos tipo de perfiles internos del plasma, que no sean $P(\Psi)$ y $F(\Psi)$. Estos perfiles provienen típicamente de simulaciones de transporte o información experimental.

2.4.2. Problema no lineal de frontera fija

La ecuación de Grad-Shafranov tiene un aspecto muy particular: en las dos funciones arbitrarias P y F aparecen derivadas respecto de la incógnita. En principio, especificando P y F como función de Ψ se obtiene un problema tipo Poisson, en general no lineal, que puede ser resuelto mediante técnicas numéricas estándar. Sin embargo, usar Ψ que es la incógnita como coordenada es impráctico, pues es muy difícil predecir las formas funcionales $P(\Psi)$ y $F(\Psi)$ cuando la variable independiente se distorsiona al resolver la ecuación. De hecho esto se manifiesta frecuentemente en inestabilidades numéricas que impiden la convergencia [9].

Para evitar esta dificultad, se suele especificar la dependencia funcional de P y F en términos de una normalización de Ψ , por ejemplo,

$$\hat{\Psi} = \frac{\Psi - \Psi_b}{\Psi_a - \Psi_b}, \quad (2.29)$$

donde Ψ_a y Ψ_b son los valores de la función de flujo en el eje magnético y en la separatriz, respectivamente. Es importante tener presente que esta normalización es independiente del proceso de adimensionalización descrito en la Sec. 2.3, y se aplica de forma análoga se se consideraran las variables físicas con sus dimensiones. Como el valor Ψ está definido a menos de una constante (la representación de \mathbf{B} y \mathbf{J} involucra sólo sus derivadas) en esta tesis usaremos $\Psi_b = 0$ como valor de referencia, sin pérdida de generalidad.

Como normalización de Ψ , en lugar de (2.29) usamos la coordenada de flujo poloidal normalizada

$$\psi = \frac{\Psi}{\Psi_0}, \quad (2.30)$$

donde $\Psi_0 = \Psi_a - \Psi_b$, es decir, el contenido de flujo poloidal de la separatriz. Con estas definiciones, Ψ vale cero en la separatriz y Ψ_0 en el eje magnético, mientras que ψ , que juega el papel de una coordenada de flujo normalizada, va desde cero en la separatriz hasta 1 en el eje magnético.

En función de la coordenada de flujo poloidal normalizada, las funciones arbitrarias

y sus derivadas pueden expresarse con estas nuevas formas funcionales

$$p(\psi) = P(\Psi) \longrightarrow \frac{dP}{d\Psi} = \frac{1}{\Psi_0} \frac{dp}{d\psi} \quad (2.31)$$

$$f(\psi) = F(\Psi) \longrightarrow \frac{dF}{d\Psi} = \frac{1}{\Psi_0} \frac{df}{d\psi} \quad (2.32)$$

a partir de las cuales podemos formular el problema del equilibrio MHD en forma adimensional de la siguiente manera,

$$\begin{cases} -\Delta^* \psi = \lambda^2 \left(R^2 \frac{dp}{d\psi} + f \frac{df}{d\psi} \right) & \text{en } \Omega \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

donde $\lambda^2 = 1/\Psi_0^2$, y $\partial\Omega$ representa la separatriz, dato del problema, que corresponde al borde del dominio Ω , la región espacial ocupada por el plasma.

El término entre paréntesis del miembro de la derecha de la ec. (2.33) es en general una función no lineal de la incógnita. Es importante notar que λ es la inversa de la amplitud de la función de flujo y por lo tanto es una incógnita del problema. En la práctica, este parámetro juega el papel de autovalor, es decir, la ec. (2.33) tendrá solución sólo para ciertos valores discretos de λ . Por eso suele referirse al problema de frontera fija de Grad-Shafranov como un problema no-lineal de autovalores [9, 10].

En el Capítulo 3 se describen las técnicas numéricas para resolver este tipo de problemas, y en el Capítulo 4 se introduce una técnica basada en el mapeo de flujos magnéticos que permite estimar rápidamente el autovalor. Cabe destacar que este autovalor tiene una interpretación física directa e importante, pues la amplitud de la función de flujo es proporcional a la corriente total del plasma.

2.4.3. Problema lineal de autovalores

Como primera aproximación al problema, es posible hacer una elección particular de las funciones arbitrarias que conducen a una ecuación de Grad-Shafranov lineal. Esta aproximación es punto de partida muy útil, tanto para la comprensión teórica del problema, como para la implementación de métodos numéricos iterativos de resolución de problemas no-lineales. En particular, empleamos la siguiente elección para las funciones arbitrarias

$$p(\psi) = p_0 \psi^2 \quad (2.34)$$

$$f^2(\psi) = f_0^2 + f_1^2 \psi^2, \quad (2.35)$$

donde p_0 es la presión máxima, en el eje magnético, $f_0 = R_0 B_0$ es proporcional a la corriente poloidal de las bobinas externas y f_1 es proporcional a la contribución del

plasma a la corriente poloidal. Es posible obtener distintas configuraciones magnéticas variando los escalares p_0 , f_0 y f_1 . Con esta elección de perfiles, se obtiene el siguiente problema diferencial

$$\begin{cases} -\Delta^* \psi = (R^2 \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_f) \psi & \text{en } \Omega \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

donde,

$$\mathcal{L}_p = \frac{2p_0}{\Psi_0^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_f = \frac{f_1^2}{\Psi_0^2}. \quad (2.37)$$

Si dejamos fijo uno de estos dos escalares, la ec. (2.36) se convierte un problema usual de autovalores con el otro escalar actuando como autovalor. Lo más natural es fijar \mathcal{L}_p , que controla la presión del plasma, y tomar \mathcal{L}_f como autovalor. En este contexto, sólo la autofunción asociada al primer autovalor es la que tiene relevancia física. Como el problema es lineal en este caso, la solución queda definida a menos de una constante, por lo que el uso de la función normalizada en este caso más sencillo, no aporta ninguna ventaja. En este caso la amplitud de Ψ , o sea, el valor de Ψ_0 se elige para obtener el valor deseado de corriente toroidal del plasma (adimensionalizado, ver Sec. 2.3).

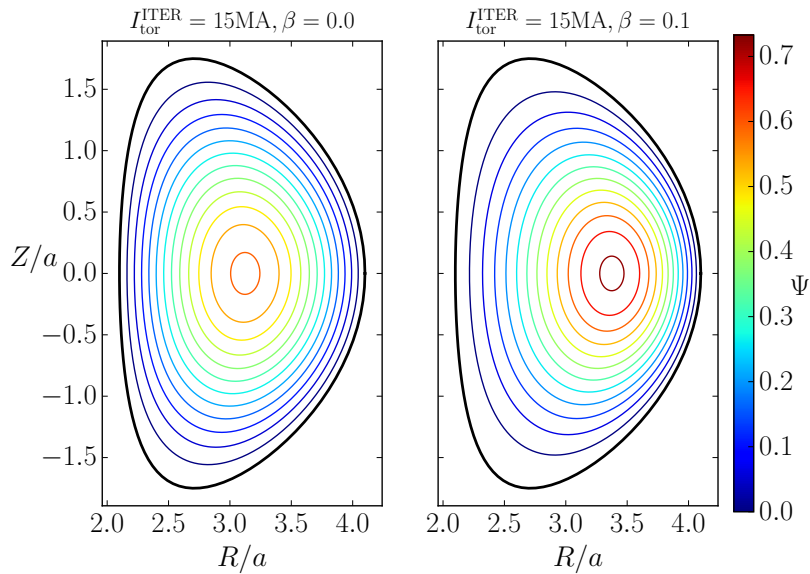


Figura 2.8: Dos soluciones del problema de autovalores con igual corriente total y distinto valor de β . El eje magnético de la solución de mayor β está desplazado hacia el exterior. Este efecto se denomina *corrimiento de Shafranov*.

Una sutileza de la secuencia de cálculo recién expuesta es que cada autofunción corresponde a un valor especificado *a priori* de \mathcal{L}_p (el valor de \mathcal{L}_f es el autovalor que se obtiene como resultado del problema). Al reescalar Ψ_0 para obtener el valor adecuado de I_p , se modifica el valor de p_0 y por lo tanto el valor de β del equilibrio. Por este motivo es necesario iterar sobre \mathcal{L}_p , cuando se busca obtener un equilibrio con valores de I_p y β preestablecidos. No obstante, la linealidad del problema permite obtener métodos

de iteración simples y eficientes, como se describe en el Capítulo 3.

En la Fig. 2.8 se muestran las superficies de flujo de dos equilibrios tipo ITER, con la misma corriente total, y distinto valor de β . Como indica el mapa de colores, la solución con $\beta = 0,1$ tiene un Ψ_0 más alto, para lograr el mismo valor de corriente. Además, es interesante notar el corrimiento radial del eje magnético que produce la presión. Este efecto se conoce como *corrimiento de Shafranov* y se debe al término R^2 que multiplica al término de la presión en la ec. de Grad-Shafranov, en este caso en la ec. (2.36).

Capítulo 3

Métodos Numéricos

“Nothing is too hard. Many things are too fast.”

— Zach Weinersmith

La determinación del equilibrio MHD de una configuración magnética fue planteada, en el capítulo anterior, en términos de la ecuación de Grad-Shafranov. Ésta es una ecuación diferencial en derivadas parciales, en general no-lineal. Para resolverla en un dominio bidimensional que representa la sección transversal del plasma, recurrimos al método de elementos finitos. Los casos no-lineales se resuelven mediante el método iterativo de Newton-Raphson. En este capítulo se describen estas técnicas

3.1. Resolución del problema no-lineal del equilibrio

El problema diferencial (2.33) que describe el equilibrio de fuerzas del plasma, involucra en el término de la derecha la suma de dos funciones que son no-lineales en la incógnita, por lo general. Al estar expresado en términos de la incógnita normalizada, ψ , el problema involucra el factor λ , que juega el papel de autovalor, agregando una complejidad adicional.

Esta dificultad puede resolverse por medio de un esquema iterativo que formulamos de la siguiente manera. Supongamos que tenemos una estimación del flujo poloidal $\Psi_0^{(j)}$, a partir de la cual consideramos el problema

$$\begin{cases} -\Delta^* \Psi^{(j+1)} = \lambda^{(j)} \left(R^2 \frac{dp}{d\psi} + f \frac{df}{d\psi} \right) & \text{en } \Omega \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

con, $\lambda^{(j)} = 1/\Psi_0^{(j)}$. Este es un problema no-lineal tipo Poisson, que puede ser resuelto mediante el método de elementos finitos combinado con iteraciones de Newton-Raphson.

Para obtener el equilibrio definitivo debe resolverse, en principio, una secuencia de problemas (3.1), hasta que valor máximo de la solución $j + 1$ coincida con $\Psi_0^{(j)}$, dentro de un margen de error tolerable. En el Capítulo 4 se describe un método para estimar las funciones $p(\psi)$ y $f(\psi)$ a partir de la información que calculan los códigos de difusión magnética y transporte cinético. Ese método incluye una estimación de $\Psi_0^{(j)}$ que acelera la convergencia de la iteración en j (incluso la elimina en ciertos casos). En este capítulo se describen las técnicas numéricas para resolver el problema de Poisson no-lineal (3.1).

3.1.1. Formulación variacional de la ecuación de Grad-Shafranov

La ecuación de Grad-Shafranov (2.12), es una ecuación diferencial de segundo orden en la que el miembro de la derecha contiene dos funciones arbitrarias, $p(\psi)$ y $f(\psi)$. Si notamos al miembro de la derecha como $b(\psi)$

$$-\Delta^* \Psi = \lambda (R^2 p'(\psi) + f(\psi) f'(\psi)) = b(\psi) \quad (3.2)$$

La formulación variacional consiste en hallar Ψ tal que para toda función de prueba ξ en un espacio de funciones $\mathcal{V}(\Omega)$ se verifique que

$$\mathcal{R}(\Psi) = \int_{\Omega} \left(\nabla \Psi \cdot \nabla \xi + \frac{\xi}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} - \xi b(\psi) \right) d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

Mediante el método de elementos finitos, es posible construir un espacio de funciones discreto, una vez definido el dominio, y obtener un sistema de ecuaciones algebraico que aproxima el problema diferencial original, usando el método de Galerkin. Esto se explica con más detalle en la Sección 3.3. Los métodos de discretización de dominio y resolución del problema en elementos finitos fueron implementados utilizando el código de acceso libre FreeFEM++ [11].

En los casos, como el que nos interesa, en que la función $b(\psi)$ es no-lineal, es necesario convertir la ecuación (3.3) en un problema lineal. El método de Newton-Raphson, que se describe a continuación, permite hacer esta linealización.

3.1.2. Método de Newton-Raphson

Uno de los métodos más utilizados para resolver sistemas de ecuaciones no lineales es el algoritmo de Newton-Raphson [12]. La idea es hallar raíces de la ec. (3.3) en el caso en que $b\psi$ es no lineal, descomponiendo el problema no-lineal en una secuencia de

problemas lineales.

Partiendo de una estimación, $\Psi^{k=0}$, de la raíz buscada, se resuelve iterativamente, desde $k = 0$, el siguiente problema lineal para la incógnita $\delta\Psi^{k+1}$

$$D\mathcal{R}(\Psi^k)(\delta\Psi^{k+1}) = \mathcal{R}(\Psi^k) \quad (3.4)$$

A partir del resultado se obtiene la nueva aproximación de la raíz

$$\Psi^{k+1} = \Psi^k + \delta\Psi^{k+1}. \quad (3.5)$$

La forma diferencial $D\mathcal{R}(\Psi)$ es el jacobiano de $\mathcal{R}(\Psi)$ y tiene para este caso la siguiente expresión

$$D\mathcal{R}(\Psi)(\delta\Psi) = \int_{\Omega} \left(\nabla \delta\Psi \cdot \nabla \xi + \frac{\xi}{R} \frac{\partial \delta\Psi}{\partial R} - \xi \lambda b'(\psi) \delta\Psi \right) d\Omega \quad (3.6)$$

Notar que $b'(\psi)$ se refiere a la derivada de b respecto de su variable, ψ , mientras que el cálculo del jacobiano requiere derivar respecto de Ψ . Por este motivo aparece el factor λ multiplicando.

De esta forma, la iteración definida por las ecuaciones (3.4) a (3.6), corresponde a una secuencia de problemas lineales que pueden resolverse con técnicas estándar de álgebra computacional. El proceso iterativo se detiene cuando la corrección $\delta\Psi^{k+1}$ se hace menor que una tolerancia especificada.

3.1.3. Condición de borde

En la implementación en elementos finitos del problema de autovalores fijamos $\Psi^0 = 0$ en la frontera. En contraposición, al resolver el problema no lineal mediante el método de Newton-Raphson, debemos determinar $\delta\Psi|_{\partial\Omega}$. En este contexto, para establecer la condición $\Psi^k|_{\partial\Omega} = 0$ debemos establecer $\delta\Psi|_{\partial\Omega} = 0$ en cada iteración y garantizar que la semilla cumpla $\Psi^0|_{\partial\Omega} = 0$. De esta forma siempre tendremos $\Psi^{k+1}|_{\partial\Omega} = \Psi^k|_{\partial\Omega} + \delta\Psi^k|_{\partial\Omega} = 0$.

3.2. Resolución del problema lineal de autovalores

Como se discute en la sección 2.4.3, la elección de los perfiles dada por la ec. 2.35, conduce al problema usual de autovalores (2.36). Este problema tiene también gran relevancia, pues provee una primera y buena aproximación al equilibrio, por un lado, y por otro, sirve como semilla inicial para el proceso iterativo de resolución de problemas no-lineales.

La resolución de problemas de autovalores mediante el método de elementos finitos no puede hacerse de forma directa, por medio de la expresión (3.3), al requerir la inversión de una matriz de determinante 0. Si bien existen rutinas de cálculo que permiten resolver un problema de autovalores de este tipo, en este trabajo estamos interesados sólo en la primera de ellas. Por ello, usamos un método basado en el problema de Poisson lineal que se explica a continuación, para el caso libre de fuerzas. La inclusión de un término de presión es inmediata, como se detalla en la sección 2.4.3.

3.2.1. Caso libre de fuerzas

Consideremos inicialmente el caso libre de fuerzas, es decir $p_0 = 0$, en el que el problema del equilibrio se reduce a

$$\begin{cases} -\Delta^* \psi = \mathcal{L}_f \psi & \text{en } \Omega \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

La expresión (3.7) tiene siempre la solución trivial $\psi = 0$, en la cual no estamos interesados. Además, existen soluciones no triviales Ψ^n únicamente para determinados autovalores $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_f^n$, los cuales dependen de la forma del dominio.

Para resolver este problema, sumamos una constante $\epsilon > 0$ a (3.7), obteniendo

$$-\Delta^* \psi = \mathcal{L}_f \psi + \epsilon. \quad (3.8)$$

En esta nueva situación, $\psi = 0$ ya no es una solución válida. Para los valores de \mathcal{L}_f lejanos a los autovalores \mathcal{L}_f^n de (3.7) se obtiene una solución de orden ϵ , mientras que en las cercanías de un autovalor \mathcal{L}_f^n la solución tiende a

$$\psi \cong \frac{\epsilon C \tilde{\psi}^n}{(\mathcal{L}_f - \mathcal{L}_f^n)}, \quad (3.9)$$

donde con C es una constante y $\tilde{\psi}^n$ una autofunción de amplitud definida. Como podemos ver de la aproximación 3.9 y en la figura 3.1, la magnitud de la solución, Ψ_0 , diverge y cambia de signo cuando \mathcal{L}_f cruza por un autovalor \mathcal{L}_f^n .

Para encontrar el primer autovalor \mathcal{L}_f^1 del problema realizamos un barrido discreto en \mathcal{L}_f desde 0 hasta que la solución cambie de signo. En este punto podemos encontrar la resonancia mediante el método de la secante, dejando de iterar en cuanto la amplitud de la solución supera en magnitud a cierto umbral de tolerancia. Fijamos este valor de tolerancia en $tol = 10^6 \epsilon$.

Una vez encontrada nuestra aproximación de ψ^1 debemos normalizar su magnitud en base a algún parámetro físico. En general utilizamos la corriente toroidal en el plasma I_{tor} , cuyo valor suele estar bien determinado en base a resultados experimentales.

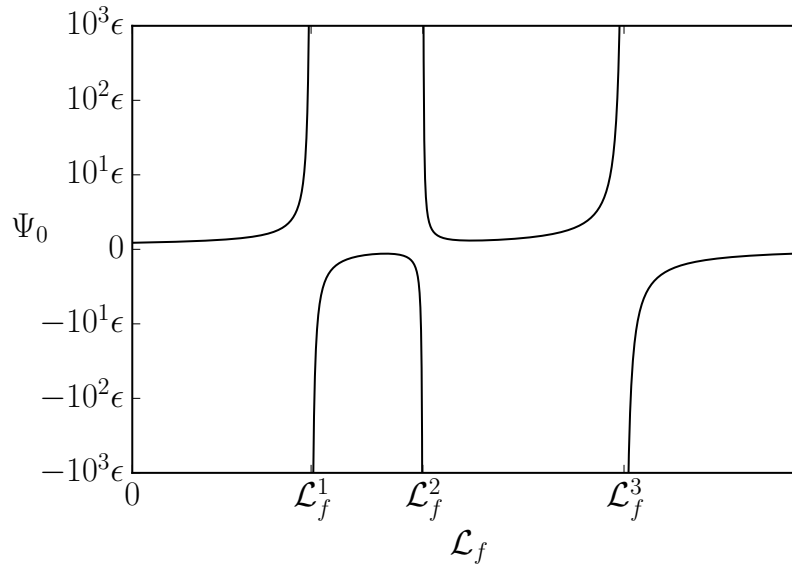


Figura 3.1: Magnitud de la solución del problema (3.8) en función del autovalor.

3.3. Método de elementos finitos

Los pasos básicos para construir la aproximación de un problema diferencial mediante el método de elementos finitos guardan relación con los que se siguen en el método de diferencias finitas. Para resolver un problema por diferencias finitas se deben efectuar los siguientes pasos:

- (1) Definir la discretización espacial, por medio de una malla de puntos distribuidos a lo largo de familias de curvas.
- (2) Desarrollar las funciones incógnita en series de Taylor, alrededor de los puntos de la malla, para construir la aproximación de las derivadas en diferencias finitas.
- (3) Reemplazar las derivadas de la ecuación diferencial por su aproximación en diferencias finitas.

De esta forma, es posible convertir el problema diferencial original en un sistema de ecuaciones algebraico, en el que las incógnitas son, típicamente, los valores de la función que se quiere determinar en los puntos de la malla.

En el método de elementos finitos la construcción de la aproximación discreta guarda relación con estos tres pasos, pero se hace de una forma más general, como se describe a continuación.

3.3.1. Discretización espacial

El dominio espacial puede ser discretizado mediante la subdivisión del continuo en elementos de forma arbitraria. La forma geométrica más empleada en problemas bidimensionales son los triángulos, pues sirven para cubrir cualquier estructura poligonal

con bordes rectos o curvos. Los elementos no deben solaparse y deben cubrir todo el dominio. La Fig. 3.2 muestra un ejemplo de subdivisión en triángulos del dominio espacial donde se busca resolver el problema diferencial. Para cada elemento se define un cierto

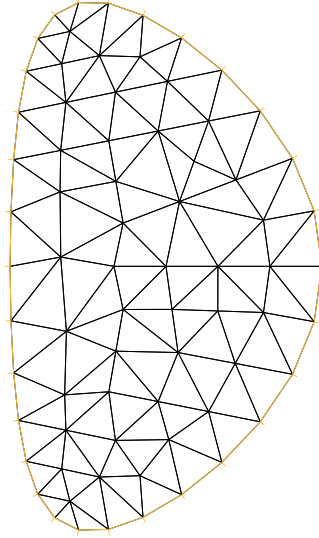


Figura 3.2: División del dominio espacial en elementos triangulares.

número de puntos, que se ubican sobre los bordes o en el interior del elemento. Estos nodos son los puntos donde se determinará el valor numérico de la función incógnita, y eventualmente sus derivadas. Al número de nodos de un elemento en particular se lo denomina *grados de libertad* de ese elemento.

3.3.2. Funciones base

La función incógnita se aproxima mediante una combinación lineal de funciones base conocidas, también denominadas funciones de interpolación, de forma o de prueba. Sea \tilde{u} una solución aproximada de $u(\mathbf{x})$, entonces la representación en series se escribe como

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_I u_I \mathcal{N}_I(\mathbf{x}) \quad (3.10)$$

donde la suma se extiende sobre todos los nodos I , es decir que cada nodo tiene una función base asociada. La definición de estas funciones base puede ser muy general, con diferentes propiedades que se eligen de la forma más adecuada al problema que se está resolviendo.

Existen métodos en los que la definición de las funciones base se extiende a todo el dominio. Tal es el caso de los métodos espectrales, en los que se utilizan las funciones trigonométricas como interpolantes [13]. También está el caso de los métodos de colocación, en los que las funciones $\mathcal{N}_I(\mathbf{x})$ se definen como polinomios ortogonales tipo Legendre, Chebyshev o similares.

En el método de elementos finitos la opción más directa para utilizar como funciones base son polinomios definidos localmente en cada elemento, siendo cero fuera de él. Además, se definen de tal modo que los coeficientes de la expansión, u_I , sean los valores nodales de la función incógnita \tilde{u} . Como consecuencia, las funciones de interpolación local deben satisfacer las siguientes condiciones en cada elemento (e) , siendo I un nodo del elemento (e)

$$\mathcal{N}_I^{(e)}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \notin (e) \quad (3.11)$$

y como u_I es el valor de la incógnita en el nodo I

$$\tilde{u}(\mathbf{x}_I) = u_I \quad (3.12)$$

de forma que para un punto arbitrario \mathbf{x}_J se verifica que

$$\mathcal{N}_I^{(e)}(\mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}. \quad (3.13)$$

Una condición adicional surge ante el requerimiento de poder representar en forma exacta la función constante, $u(\mathbf{x}) = \mathcal{C}$. Para ello se debe verificar

$$\sum_I \mathcal{N}_I^{(e)}(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in (e). \quad (3.14)$$

Todas estas condiciones permiten determinar las funciones base polinomiales en cada elemento. El orden del polinomio interpolante depende esencialmente de los grados de libertad (número de nodos) del elemento. También es posible contemplar condiciones adicionales sobre la regularidad del interpolante y la continuidad en el borde de cada elemento. Finalmente, la función base global \mathcal{N}_I se construye ensamblando las contribuciones $\mathcal{N}_I^{(e)}$ de todos los elementos a los que pertenece el nodo I .

Elementos triangulares P_K

Para lograr la representación discreta (3.10) de la función incógnita $u(\mathbf{x})$ es necesario definir el espacio de elementos finitos adecuado, es decir, efectuar la subdivisión del dominio en elementos, definir los nodos e interpolantes de cada elemento y ensamblar finalmente las funciones base globales \mathcal{N}_I , de cada nodo (que puede estar compartido por varios elementos).

En esta tesis se consideran exclusivamente elementos triangulares bidimensionales, con funciones base polinomiales de diferente orden. En particular, se utilizan los elementos conocidos como P_K [14]. En la Fig. 3.3 se muestran esquemáticamente tres ejemplos de elementos P_K triangulares con distinto número de nodos. Estos elementos pertenecen a la familia de elementos Lagrangianos, porque los valores nodales coinciden con el valor de la función incógnita en esa posición.

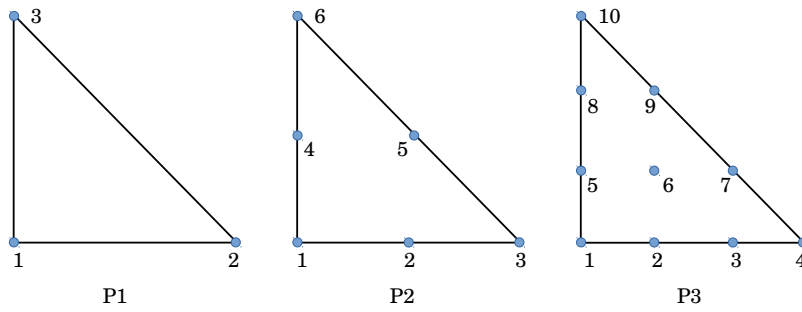


Figura 3.3: Elementos triangulares P_K con diferente número de nodos o grados de libertad.

En el caso más simple, los elementos P_1 , las funciones base son,

$$\mathcal{N}_I^{(e)}(x, y) = a_I + b_I x + c_I y \quad \text{para } I = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

válida dentro del elemento (e). Los tres coeficientes del polinomio, que representan los tres grados de libertad de este tipo de elementos, pueden determinarse a partir de las condiciones establecidas por las ecuaciones (3.13) y (3.14). Los elementos P_2 tienen 6 grados de libertad, y el polinomio que define las funciones base queda de la forma

$$\mathcal{N}_I^{(e)}(x, y) = a_I + b_I x + c_I y + d_I x^2 + e_I xy + f_I y^2 \quad \text{para } I = 1, 2, 3 \quad (3.16)$$

cuyos coeficientes pueden obtenerse a partir de las mismas relaciones antes mencionadas.

3.3.3. Formulación variacional

Hasta aquí hemos descripto brevemente cómo construir la representación discreta del dominio y las funciones incógnita usando elementos finitos. El paso siguiente consiste en formular adecuadamente el problema diferencial que se quiere resolver en el marco de esta representación discreta. Para hacer esto es conveniente reformular el problema diferencial en su forma variacional, o débil, como se detalla a continuación.

A modo de ejemplo consideramos primero la ecuación de Poisson

$$\mathcal{L}(u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b \quad (3.17)$$

donde \mathcal{L} representa un operador diferencial lineal, en este caso, el Laplaciano. Si $\tilde{u}(x, y)$ es una aproximación de la solución u , el residuo R definido como

$$R(\tilde{u}) = \mathcal{L}(\tilde{u}) - b = \nabla \cdot (\nabla \tilde{u}) - b \quad (3.18)$$

es, en principio, distinto de cero. Un algoritmo de resolución es convergente si es capaz

de hacer tender $R(\tilde{u})$ a cero a medida que se incrementa la resolución de la aproximación \tilde{u} . Notar que el residuo puede ser considerado como una medida de la precisión del método o bien del error asociado a la aproximación \tilde{u} .

En general, no es posible hacer cero el residuo en todos los nodos de la representación discreta del dominio. Sin embargo, es posible obtener la “mejor” aproximación (en algún sentido) pidiendo que se anule un promedio pesado con alguna función. Esta condición se puede formular en términos de la siguiente integral en el dominio Ω

$$\int_{\Omega} W R(\tilde{u}) \, d\Omega = 0 \quad (3.19)$$

donde $W(\mathbf{x})$ es una función de peso que satisface algunas propiedades. Usando la definición de residuo, se obtiene

$$\int_{\Omega} W \nabla \cdot (\nabla \tilde{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} b W \, d\Omega. \quad (3.20)$$

Un paso esencial en esta formulación es la integración por partes de los términos con derivadas de segundo orden, usando el teorema de Green,

$$\int_{\Omega} W \nabla \cdot (\nabla \tilde{u}) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla W \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} W \, d\Gamma \quad (3.21)$$

donde el último término corresponde a la derivada normal a lo largo de la frontera Γ del dominio. De esta forma, la ec. (3.20) se convierte en

$$- \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla W \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} W \, d\Gamma = \int_{\Omega} b W \, d\Omega. \quad (3.22)$$

y el problema diferencial, que consiste en hallar la función que satisface la ecuación (3.17) y las condiciones de contorno, se convierte en la función que satisface (3.22) para todas las funciones de peso W (también llamadas funciones de prueba) de un cierto espacio de funciones \mathcal{H}_W . Esta es la formulación variacional o formulación débil de la ecuación diferencial (3.17).

3.3.4. Método de Galerkin

Cuando se considera que \tilde{u} y las funciones W son aproximaciones discretas de un problema continuo, la formulación variacional (3.22) puede representarse como un conjunto de ecuaciones algebraicas. Distintos métodos numéricos pueden obtenerse para distintas elecciones del espacio de funciones de prueba. El método más empleado es el método de Galerkin, en el que las funciones de peso se hacen coincidir con las funciones base $\mathcal{N}_I(\mathbf{x})$.

Para cada uno de los M grados de libertad de la representación de la función

incógnita en elementos finitos

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_I u_I \mathcal{N}_I(x, y) \quad I = 1, \dots, M \quad (3.23)$$

y la elección $W = \mathcal{N}_J(x, y)$, se obtiene a partir de la ec. (3.22), la siguiente ecuación discreta para el nodo J

$$- \sum_I u_I \int_{\Omega_J} \nabla \mathcal{N}_I \cdot \nabla \mathcal{N}_J \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \mathcal{N}_J \, d\Gamma = \int_{\Omega_J} b \mathcal{N}_J \, d\Omega \quad (3.24)$$

donde Ω_J es el subdominio formado por todos los elementos que contienen al nodo J y la suma sobre I recorre todo los nodos de Ω_J . La matriz

$$K_{IJ} = \int_{\Omega_J} \nabla \mathcal{N}_I \cdot \nabla \mathcal{N}_J \, d\Omega \quad (3.25)$$

se denomina matriz de rigidez. Notar que esta matriz sólo depende de la geometría, la subdivisión en elementos (mallado) y del tipo de elemento elegido.

Capítulo 4

Mapeo aproximado de flujos magnéticos para cálculo de equilibrio

“The best way to predict the future is to invent it”

— Alan Kay

El cálculo de equilibrios MHD a partir de la especificación de otros perfiles magnéticos aparte de $f(\psi)$ y su derivada representa un gran desafío. Esta dificultad surge naturalmente cuando se trata de resolver en forma simultánea el problema del transporte, que modifica los perfiles del plasma, y la condición de equilibrio impuesta por la ecuación de Grad-Shafranov. En este Capítulo describimos este acoplamiento y las dificultades que surgen. Luego, se formula un método basado en un mapeo aproximado de flujos magnéticos que sirve para actualizar la condición de equilibrio a partir de la información que calculan los códigos de transporte. Finalmente, se construye un método iterativo para calcular equilibrios a partir de la especificación de perfiles arbitrarios.

4.1. Acoplamiento entre los procesos de transporte y la condición de equilibrio

En ausencia de inestabilidades MHD de escala macroscópica, la *performance* o desempeño de una descarga está determinada por los mecanismos de transporte cinético (masa, momento y energía) y magnéticos (difusión magnética por resistividad, principalmente) dentro del plasma. La escala de tiempo de los procesos de transporte es

mucho mayor que la de los procesos MHD que controlan el equilibrio de fuerzas. Por ejemplo, en el caso de la difusión resistiva,

$$S = \frac{\tau_r}{\tau_A} \sim 10^6,$$

es el número de Lundquist típico en un tokamak moderno, donde $\tau_r = \mu_0 a^2 / \eta \sim 1$ s es la escala de tiempo resistiva y $\tau_A = a / v_A \sim 1$ μ s, el tiempo de Alfvén, que determina la escala de tiempo MHD.

Por esta razón, es una buena aproximación suponer que el sistema se encuentra en equilibrio de fuerzas permanentemente, mientras las variables cinéticas y magnéticas varían en la escala de tiempo de los procesos de transporte en la dirección perpendicular al campo magnético. Como estas cantidades son variables de flujo, constantes en cada superficie magnética, el problema del transporte suele formularse en forma unidimensional, utilizando como coordenada una variable de flujo. La geometría espacial en la que se define esa coordenada está dada por la condición de equilibrio, y se obtiene a partir de la ecuación de Grad-Shafranov. Por eso para describir el problema del transporte, se necesita conocer el equilibrio del plasma.

El acoplamiento entre el problema del transporte y la condición de equilibrio MHD es bidireccional. Al evolucionar las variables cinéticas se modifica, en particular, el perfil $P(\Psi)$. Análogamente, la evolución de las variables magnéticas producen cambios en la función $F(\Psi)$. Por lo tanto, el equilibrio se modifica en la escala de tiempo más lenta del transporte. En consecuencia, para resolver un modelo que incluya los fenómenos transporte es necesario resolver, simultáneamente, la condición de equilibrio y contar con un esquema de acoplamiento entre ambos modelos [5–7].

4.1.1. Modelos de transporte orientados a control

En los últimos años, ha surgido una línea de investigación enfocada en desarrollar técnicas de control de los perfiles cinéticos y magnéticos del plasma [15–17]. La idea es utilizar los sistemas de forzado de corriente no-inductivos, como las antenas de radiofrecuencia de ciclotrón electrónica (ECCD, *electron cyclotron current drive*) e iónica (ICRH, *ion cyclotron resonance heating*) y la inyección de haces neutros (NBI, *neutral beam injection*), como actuadores. Debido a que el efecto de estos sistemas de forzado de corriente sobre los perfiles del plasma es complejo, es necesario contar con modelos dinámicos adecuados de esa respuesta, como base para el diseño de los controladores.

Se ha comprobado que es posible diseñar controladores tipo PID usando la información de la respuesta estática del plasma a cada uno de los actuadores [16]. Sin embargo, las limitaciones de ese enfoque han motivado el desarrollo de controladores avanzados basados en modelos de la respuesta del plasma, deducidos de primeros prin-

cipios [17, 18]. La física que gobierna esta respuesta dinámica es compleja e involucra en principio todos los mecanismos de transporte acoplados al problema del equilibrio. Si bien existen códigos de transporte que incluyen modelos de este tipo [19–21], se trata de códigos de muy elevada complejidad y costo computacional, que no resultan de utilidad práctica para el desarrollo de controladores.

Actualmente, el diseño de esquemas de control de perfiles magnéticos, basado en modelos deducidos de primeros principios, utiliza una versión simplificada de la ecuación de difusión magnética [17, 22]. Esta se obtiene partiendo de la ley de Faraday,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (4.1)$$

Promediando esta expresión en las superficies magnéticas, con la técnica que se describe en la siguiente Sección, se obtiene [5, 6]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \rangle}{\langle R^{-2} \rangle f}. \quad (4.2)$$

Usando la ley de Ohm para la parte inductiva de la densidad de corriente,

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta(\mathbf{J} - \mathbf{J}_{\text{NI}}), \quad (4.3)$$

donde η es la resistividad, \mathbf{v} es la velocidad del plasma y \mathbf{J}_{NI} es la componente no inductiva de la densidad de corriente, y reemplazando en (4.2), se llega a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0 \rho_b^2 \hat{F}^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \hat{D}_\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + R_0 \hat{H} \eta \frac{\langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_{\text{NI}} \rangle}{B_0}. \quad (4.4)$$

que es la ecuación de difusión magnética empleada para hallar $\Psi(\rho, t)$, la evolución temporal de la función de flujo poloidal, como función del radio medio normalizado de cada superficie de flujo. El primer término de la derecha modela la difusión resistiva del flujo poloidal respecto del toroidal, y el segundo se interpreta como un término fuente que incluye el efecto de los actuadores y los efectos neoclásicos, como la corriente de bootstrap [3, 22]. Las condiciones de contorno para resolverla surgen de la simetría en el eje magnético y la corriente total en el borde del plasma,

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{R_0}{\hat{G}|_{\rho=1} \hat{H}|_{\rho=1}} I_{\text{tor}}. \quad (4.5)$$

El radio medio normalizado, ρ , juega el rol de variable espacial y los términos \hat{D}_Ψ , \hat{F} , \hat{G} y \hat{H} dan la geometría del problema. Estos perfiles se determinan a partir del

equilibrio MHD por medio de las expresiones,

$$\hat{F} = \frac{R_0 B_0}{f}, \quad \hat{G} = \left\langle \frac{R_0^2}{R^2} |\nabla \rho|^2 \right\rangle, \quad \hat{H} = \frac{\hat{F}}{\langle R_0^2 / R^2 \rangle}, \quad \hat{D}_\Psi = \hat{F} \hat{G} \hat{H}. \quad (4.6)$$

Entonces, por un lado es posible calcular los perfiles (4.6) utilizando la información del equilibrio MHD, y por el otro, es posible estimar el término fuente asociado a \mathbf{J}_{NI} utilizando una serie de modelos para los actuadores y los efectos neoclásicos. Esto, junto con un modelo para la resistividad del plasma, permite calcular $\partial \Psi / \partial t$ con la ec. (4.4).

Ahora bien, supongamos que eso se implementa en un esquema numérico. La derivada temporal de Ψ nos permite actualizar el mapeo $\Psi(\rho)$ desde un paso de tiempo t_n hasta un paso de tiempo t_{n+1} . Es decir, al cabo de un paso difusivo

$$\Psi(\rho, t_n) \longrightarrow \Psi(\rho, t_{n+1}). \quad (4.7)$$

La dificultad del acoplamiento de este avance temporal con la condición de equilibrio radica en que no hay métodos eficientes para recalcular, o actualizar, la ecuación de Grad-Shafranov a partir del mapeo de flujos $\Psi(\rho)$. Por este motivo, el diseño de controladores de perfiles durante la descarga de un tokamak se realiza resolviendo la ec. (4.4) con perfiles geométricos \hat{F} , \hat{G} y \hat{H} fijos, calculados *a priori* a partir de un equilibrio elegido como representativo de la descarga a controlar [18, 22]. Este enfoque se esquematiza en la Fig. 4.1.

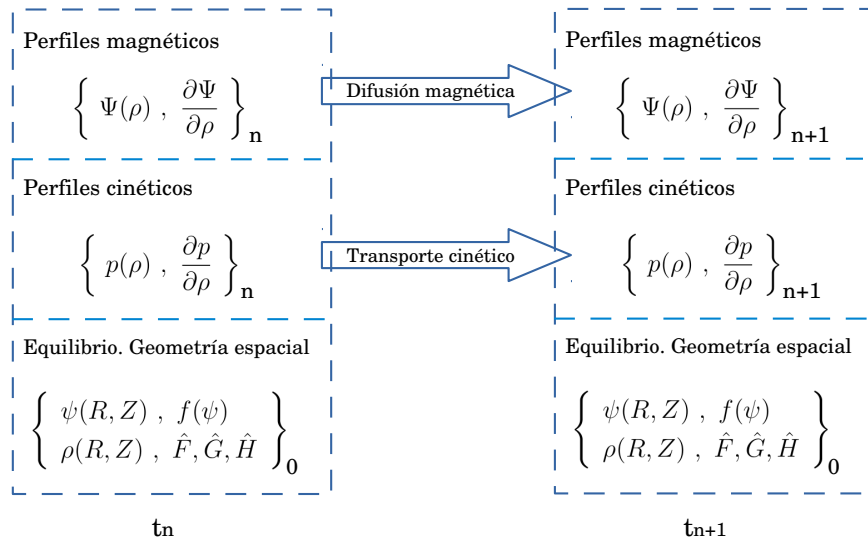


Figura 4.1: Actualización de perfiles desde el tiempo t_n al t_{n+1} , debido a la difusión magnética y a un modelo para el transporte cinético. Una primera aproximación consiste en suponer que la geometría espacial de la configuración se especifica *a priori* y se mantiene constante.

En esta Tesis presentamos un método de mapeo aproximado de flujos que permite actualizar la condición de equilibrio de un paso a difusivo a otro en forma eficiente.

La descripción del método se da en la Sección 4.3. La técnica de promediado sobre superficies de flujo, utilizada por el método se describe en la próxima Sección. Los resultados obtenidos se muestran en el siguiente Capítulo.

4.2. Promediado sobre superficies de flujo

Al plantear una formulación undimensional del problema del transporte, en coordenadas de flujo, aparece la dificultad de que algunas magnitudes físicas relevantes en el análisis no son cantidades de flujo. Para incorporar las variables de ese tipo se utiliza el valor promedio sobre cada superficie de flujo, como se hizo con el término \mathbf{J}_{NI} en la Sección anterior. Para una variable arbitraria A , su promedio sobre la superficie de flujo se define como

$$\langle A \rangle = \frac{\partial}{\partial V} \int_{V(\chi)} A dV, \quad (4.8)$$

donde V es el volumen encerrado dentro de la superficie magnética identificada con la coordenada de flujo χ (ver Sección 2.1.2). Conociendo el equilibrio, se cuenta con la dependencia espacial de las variables magnéticas, en este caso representada por la variable genérica $\chi = \chi(R, Z)$. De este modo que sería posible calcular los promedios haciendo integrales en el espacio empleando, por ejemplo, coordenadas cilíndricas.

Sin embargo, la utilidad de tomar promedios consiste en poder trabajar en coordenadas de flujo, reduciendo la complejidad espacial del problema. Para expresar la ec. (4.8) en coordenadas de flujo, comenzamos por el diferencial de volumen,

$$dV = dRdZ R d\phi = J d\chi d\theta d\phi, \quad (4.9)$$

donde J representa el *jacobiano* de la transformación de coordenadas que está definido a través de los gradientes espaciales de las coordenadas de flujo de acuerdo a

$$J^{-1} \equiv \nabla \chi \times \nabla \theta \cdot \nabla \phi. \quad (4.10)$$

Usando la ec. (4.9), podemos expresar el volumen encerrado por una superficie de flujo axisimétrica como

$$V(\chi) = \int_{V(\chi)} dV = 2\pi \int_{\chi_0}^{\chi} d\chi \int_0^{2\pi} d\theta J, \quad (4.11)$$

donde χ_0 es el valor de χ en el eje magnético.

Usando la definición del jacobiano de la transformación es posible relacionar $d\theta$, el diferencial de ángulo poloidal, con $d\ell$, el diferencial de arco del contorno de la superficie de flujo (ver ec. (5.23) de la Ref. [7]),

$$d\ell = \frac{|\nabla \chi|}{R} J d\theta. \quad (4.12)$$

A partir de esta expresión y la ec. (4.11) podemos escribir el volumen diferencial de la superficie de flujo como

$$V'(\chi) = \frac{dV}{d\chi} = 2\pi \oint \frac{Rd\ell}{|\nabla\chi|} \quad (4.13)$$

donde la integral se efectúa sobre el contorno de flujo sobre el plano poloidal. Finalmente, estamos en condiciones de expresar el promedio de la cantidad A como

$$\langle A \rangle = \frac{2\pi}{V'} \oint A \frac{Rd\ell}{|\nabla\chi|} \quad (4.14)$$

que es una expresión más práctica dado que involucra únicamente integrales de contorno.

De las expresiones (4.13) y (4.14) queda claro que las cantidades de flujo coinciden con su promedio, como era de esperar. Por otro lado, es posible obtener la siguiente identidad para calcular el promedio de la divergencia de un campo escalar \mathbf{A} ,

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{V'} \frac{d}{d\chi} [V' \langle \mathbf{A} \cdot \nabla\chi \rangle]. \quad (4.15)$$

La elección natural de la coordenada de flujo radial, χ , depende del contexto. En los problemas de equilibrio MHD que involucran la ecuación de Grad-Shafranov, lo natural es tomar la función de flujo poloidal, mientras que en los problemas de transporte o difusión magnética, lo habitual es utilizar el radio medio normalizado, ρ .

4.2.1. Cálculo del factor de seguridad

Utilizando el formalismo de coordenadas de flujo, podemos expresar el flujo magnético toroidal encerrado por una superficie magnética mediante

$$\begin{aligned} \Phi(\Psi) &= \int_{\Omega_\Psi} B_\phi dRdZ \\ &= \int_{\Psi_0}^{\Psi} \oint \frac{F(\Psi')}{R} \frac{d\Psi' d\ell}{|\nabla\Psi'|}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Si ahora reemplazamos 4.16 en 2.27, podemos obtener una expresión para q que depende de una integral de camino a lo largo de la superficie de flujo,

$$q(\Psi) = \frac{F(\Psi)}{2\pi} \oint \frac{d\ell}{R|\nabla\Psi|}. \quad (4.17)$$

Esta última es la que utilizamos para calcular el factor de seguridad en la implementación numérica.

4.2.2. Ecuación de Grad-Shafranov promediada

Reemplazando la definición (2.9) en la ecuación de Grad-Shafranov (2.33) y reordenando, se obtiene

$$-\Psi_0^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi}{R^2} \right) = \frac{dp}{d\psi} + R^{-2} \frac{1}{2} \frac{df^2}{d\psi}, \quad (4.18)$$

que tiene validez en todo el plasma, en cada posición espacial. Notar que, expresada de esta manera, el único término que es una cantidad de superficie es el gradiente de presión, el primero del miembro de la derecha.

Promediando la condición de equilibrio en cada superficie de flujo es posible obtener una relación que es de gran utilidad. Haciendo uso de la identidad (4.15) la ecuación de Grad-Shafranov promediada resulta

$$-\frac{\Psi_0^2}{(dV/d\psi)} \frac{d}{d\psi} \left[\left\langle \frac{|\nabla \psi|^2}{R^2} \right\rangle \frac{dV}{d\psi} \right] = \frac{dp}{d\psi} + \langle R^{-2} \rangle \frac{1}{2} \frac{df^2}{d\psi}, \quad (4.19)$$

donde se dejaron explícitamente indicadas las variables de derivación para recordar que los promedios se toman usando a ψ como coordenada de flujo.

4.3. Mapeo aproximado de flujos magnéticos

4.3.1. Actualización del equilibrio

Volvemos a considerar el problema de actualización del equilibrio a partir de la información provista por el avance temporal de los perfiles magnéticos y cinéticos del plasma, esquematizado en la Fig. 4.1. El objetivo es calcular el nuevo equilibrio $\psi(R, Z)$ en el paso temporal t_{n+1} . Para hacer esto necesitamos, según lo explicado en los Capítulos 2 y 3, las funciones arbitrarias $p(\psi)$ y $f(\psi)$, además de la curva que define la separatriz. Complementariamente, una buena estimación de Ψ_0 , que actúa como autovalor, ayudaría a encontrar la solución más rápidamente.

Parte de esta información puede obtenerse directamente de los perfiles actualizados por los modelos de transporte. En particular Ψ_0 , es un dato del código de difusión magnética,

$$(\Psi_0)_{n+1} = \text{máx}(\Psi_{n+1}). \quad (4.20)$$

Por otro lado, es posible estimar el gradiente de presión respecto de la coordenada poloidal, combinando la información de los modelos de transporte magnético y cinético,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \psi} \right)_{n+1} = \frac{(\partial p / \partial \rho)_{n+1}}{(\partial \psi / \partial \rho)_{n+1}}. \quad (4.21)$$

De esta forma aprovechamos la información del mapeo $\Psi(\rho)$ que provee el código de

difusión magnética.

El único perfil restante es $f(\psi)$ y su derivada, que determina los perfiles magnéticos del plasma, en particular el factor de seguridad que es una variable de principal interés. Si bien la corrección en el valor de f es menor, la forma de su derivada tiene un enorme impacto en la estructura magnética de la configuración. Este dato es el más difícil de estimar. Los métodos existentes para incorporar la condición de equilibrio en los códigos de transporte se basan en iterar sobre la distribución espacial de la densidad de corriente [23], o bien, en la solución del equilibrio utilizando coordenadas de flujo, que iteran sobre la malla espacial [21].

En esta Tesis presentamos un nuevo método basado en la estimación de la derivada de $f^2(\psi)$ utilizando la ec. de Grad-Shafranov promediada en superficies de flujo (4.19) y un mapeo aproximado de los flujos magnéticos. La función $f(\psi)$ se obtiene luego integrando desde su valor en la separatriz, que es el de vacío ($f(\psi = 0) = f_0 = R_0 B_0$), y tomando raíz cuadrada.

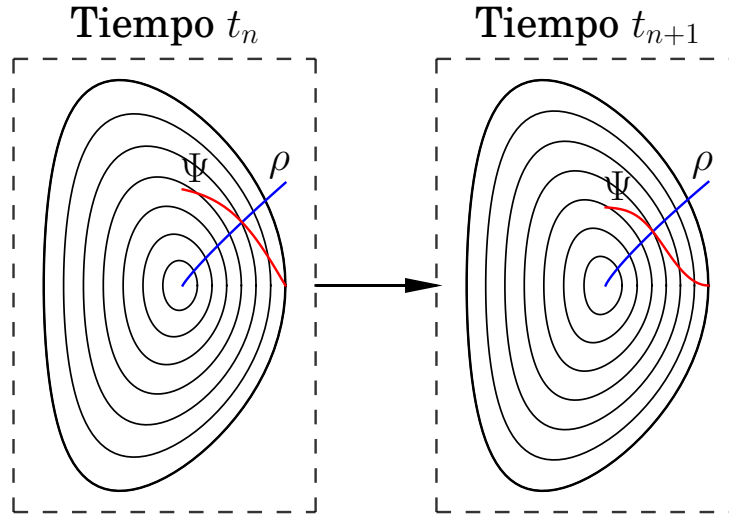


Figura 4.2: Evolución difusiva del mapeo de flujos magnéticos $\Psi(\rho)$. La difusión magnética desplaza los contornos de flujo poloidal mientras que los contornos de flujo toroidal se mantienen aproximadamente inmóviles.

Consideremos, entonces, la ec. (4.19) que se satisface exactamente para los datos del problema a tiempo t_n , y queremos usarla para calcular $df^2/d\psi$ en el paso $n + 1$. Contamos con la actualización de Ψ_0 y el gradiente de presión provistas por las ecs. (4.20) y (4.21). Para estimar la actualización de los términos del miembro de la izquierda de la ec. (4.19), supondremos que el efecto de la difusión magnética es desplazar *espacialmente* los contornos de flujo poloidal, dejando invariantes los de flujo toroidal. Esta aproximación se esquematiza en la figura 4.2.

Formalmente, esta condición puede expresarse como

$$\{ \rho(R, Z) \}_{n+1} \approx \{ \rho(R, Z) \}_n \Rightarrow |\nabla \rho|_{n+1} \approx |\nabla \rho|_n \quad (4.22)$$

lo que implica a su vez que los contornos de flujo mantienen su forma espacial y el contenido de flujo toroidal. Lo que sí se modifica es el contenido de flujo poloidal de cada contorno, de acuerdo al nuevo mapeo $\Psi(\rho)$ impuesto por el paso de difusión magnética. Combinando la aproximación (4.22) con el mapeo de flujos actualizado, obtenemos

$$|\nabla \psi|_{n+1} = |\nabla \rho|_{n+1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right|_{n+1} \approx |\nabla \rho|_n \left| \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right|_{n+1} = \frac{(\partial \psi / \partial \rho)_{n+1}}{(\partial \psi / \partial \rho)_n} |\nabla \psi|_n \quad (4.23)$$

que nos permite estimar todos los términos de la ec. (4.19), ya que

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = 2\pi \oint \frac{R d\ell}{|\nabla \psi|} \quad (4.24)$$

y

$$\left\langle \frac{|\nabla \psi|^2}{R^2} \right\rangle = 2\pi \oint \frac{|\nabla \psi|}{R} d\ell. \quad (4.25)$$

Por último, como está implícito en la aproximación (4.22), el término $\langle R^{-2} \rangle$ permanece invariante *como función de ρ* , dado que la forma espacial de los contornos se mantiene. Sin embargo, se modifica como función de ψ (que es la dependencia que recibe el código de equilibrio) ya que el mapeo de flujos se actualiza por la difusión magnética. Lo mismo ocurre para el resto de las funciones involucradas.

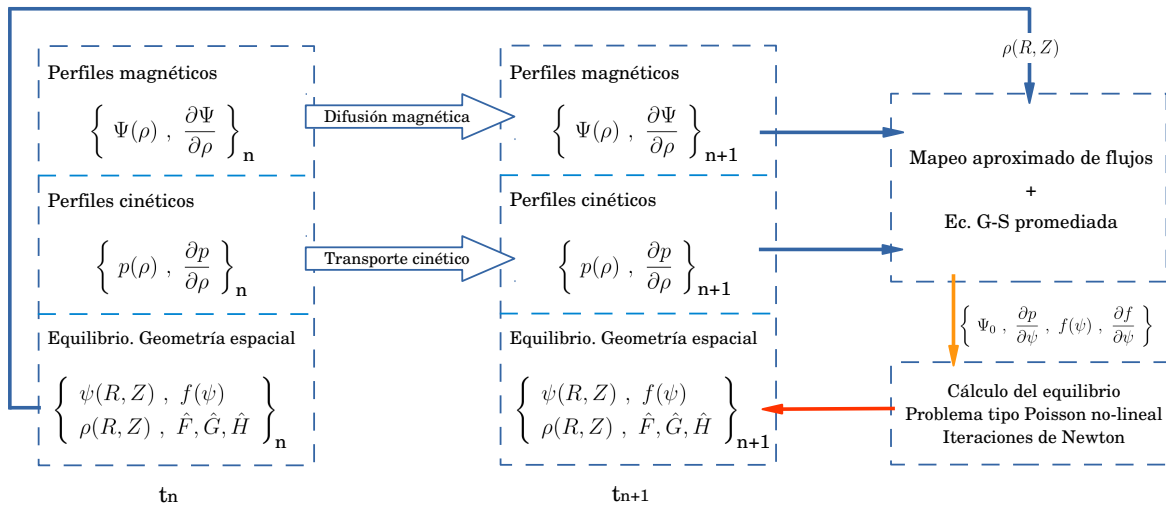


Figura 4.3: Avance temporal de los perfiles del plasma incluyendo un esquema de cálculo del equilibrio que permite actualizar la geometría de la configuración

La secuencia del método de actualización del equilibrio a partir de los perfiles del plasma se esquematiza en la Fig. 4.3 y se resume en los siguientes puntos

- (1) La ec. (4.19) se satisface exactamente para los datos del paso t_n , y se debe hallar el par $\{ \psi(R, Z) , f(\psi) \}$ para que se satisfaga en el paso t_{n+1} .
- (2) Se toma como dato el contenido de flujo poloidal Ψ_0 que provee el modelo de difusión magnética y la actualización del gradiente de presión (4.21).
- (3) Suponiendo que los contornos de flujo poloidal se mantienen y haciendo uso de la actualización del mapeo $\Psi(\rho)$ debido a la difusión magnética, se estima el gradiente espacial de flujo poloidal según la ec. (4.23).
- (4) Se calculan $f(\psi)$ y su derivada en el nuevo paso temporal utilizando la ec. de Grad-Shafranov promediada (4.19).
- (5) Se resuelve la ecuación de Grad-Shafranov como problema de Poisson no-lineal, como se describe en el Capítulo 3.

Es importante notar que a pesar que la estimación de $f(\psi)$ y su derivada se realiza dejando formalmente fija la geometría de los contornos de flujo toroidal, esta estructura sí se actualiza cada vez que se recalcula el equilibrio. Una ventaja importante de este método es que no requiere iteraciones “externas”, es decir, más allá de las iteraciones de Newton intrínsecas a la no-linealidad. Sin embargo, cuando los perfiles del plasma que se quieren aproximar difieren mucho de aquellos que satisface el equilibrio que se usa como referencia, es necesario efectuar algunas iteraciones externas como se describe a continuación. Otra característica interesante de este método es que permite actualizar el equilibrio incorporando tanto la variación de los perfiles magnéticos como la de los perfiles cinéticos, y esta información puede venir de modelos o incluso de códigos diferentes.

4.3.2. Método iterativo para cálculo del equilibrio

El esquema descrito anteriormente permite actualizar el equilibrio ante modificaciones relativamente pequeñas en los perfiles del plasma, partiendo de un equilibrio inicial conocido. Sin embargo, para inicializar ese problema, o bien, para calcular un equilibrio a partir de un conjunto de perfiles arbitrarios, el esquema anterior no dará, en general, un resultado preciso. Cuando no se tiene una buena estimación del equilibrio, es necesario recurrir a un método iterativo como el que se esquematiza en la Fig. 4.4.

En este caso, el planteo del problema es el siguiente. Suponemos que los perfiles magnéticos y cinéticos del plasma son dato, en particular, $\partial\Psi/\partial\rho$ y $\partial p/\partial\rho$. Al igual que en los demás casos, debe especificarse también la separatriz, pues en este trabajo nos restringimos al problema de frontera fija. El esquema de cálculo descrito en la sección anterior permite también formular un método iterativo para obtener el equilibrio con los perfiles especificados.

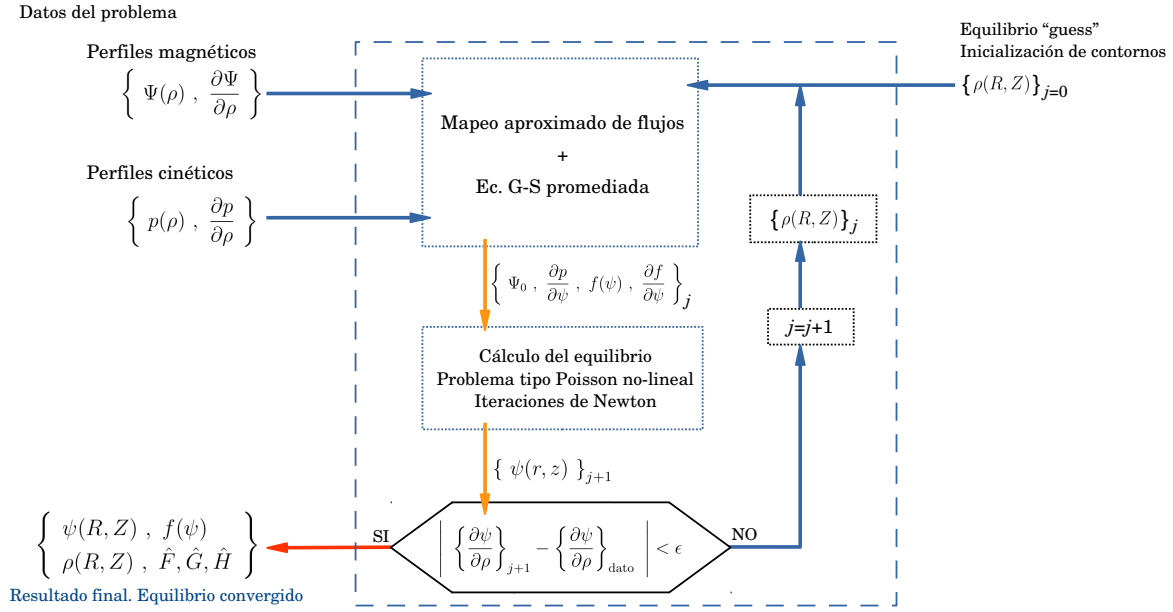


Figura 4.4: Usando el mapeo aproximado de flujos y la ec. (4.19), es posible construir un método iterativo para obtener equilibrios con perfiles magnéticos y cinéticos preestablecidos.

El cálculo comienza a partir de un equilibrio inicial, a modo de semilla o *guess*, que nos permita construir un mapa de contornos de flujo toroidal. En caso de no tener una buena estimación, se puede comenzar con una solución del problema lineal (2.36). Este problema se resuelve fácilmente especificando únicamente la forma de la separatriz, Ψ_0 o I_{tor} y β o p_0 , que son todos datos disponibles en este problema.

A partir de los contornos de flujo toroidal de este equilibrio inicial (iteración $j = 0$) y los perfiles objetivo, es posible estimar el conjunto de datos

$$\left\{ \Psi_0, \frac{\partial p}{\partial \psi}, f(\psi), \frac{\partial f}{\partial \psi} \right\} \quad (4.26)$$

en la primera iteración (ver Fig. 4.4). Con esta información, resolvemos la ecuación de Grad-Shafranov formulada como problema no-lineal tipo Poisson, para obtener el equilibrio de la segunda iteración. Este nuevo equilibrio tiene un nuevo mapa de contornos de flujo toroidal que permite volver a estimar la información (4.26), usando nuevamente los perfiles objetivo. Repitiendo este proceso, se obtiene una secuencia de equilibrios cuyos perfiles se acercan cada vez más a los perfiles objetivo. El cálculo se da por terminado, cuando se satisface algún criterio de convergencia adecuado. Los resultados obtenidos usando este método se muestran en la sección 5.1.

4.3.3. Factor de seguridad y otros perfiles

Uno de los principales objetivos de las técnicas de control de los perfiles internos del plasma, consiste en lograr el control del perfil de factor de seguridad. Si bien hemos

formulados los métodos de actualización (Sec. 4.3.1) y cálculo de equilibrios a partir de la especificación de los perfiles $\Psi(\rho)$ y su derivada, es importante tener presente que la relación de estos con el factor de seguridad es directa. A partir de las definiciones (2.27), (2.20) y (2.21) obtenemos

$$q = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{d\Psi} \Rightarrow \frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = B_0 \rho_b \frac{\rho}{q}, \quad (4.27)$$

de modo que especificar q , es equivalente a especificar $\partial\Psi/\partial\rho$. Por lo tanto, de la forma que están planteados los métodos de la sección anterior, es inmediato formular el problema de obtención de un equilibrio cuando se especifica un perfil de seguridad objetivo. Ese es el enfoque de los resultados mostrados en la sección 5.1. En general, el método servirá siempre que a partir de los datos del equilibrio que se desea calcular sea posible obtener el mapeo $\Psi(\rho)$ y estimar su derivada, o bien, $\psi(\rho)$ junto con la especificación del valor de la corriente total del plasma.

Capítulo 5

Resultados

“It’s chaos. Be kind.”

— Michelle E. McNamara

Mostramos la capacidad del método explicado en el capítulo 4 para encontrar equilibrios con perfiles de q y p prescritos y para actualizar la condición de equilibrio durante una descarga usando los datos de una simulación de transporte. Para esto modelamos en una primer instancia equilibrios representativos de los escenarios de operación del reactor ITER y posteriormente calculamos la condición de equilibrio para varios pasos de una simulación de difusión magnética. Hacemos esto último de tres formas, primero calculando el equilibrio en todos los pasos difusivos $\Delta n = 1$, luego calculando cada $\Delta n > 1$ pasos, y finalmente cada $\Delta n > 1$ pasos y con una iteración extra para mejorar la convergencia. El método fue implementado en GNU Octave, y la comunicación entre los procesos de este último y FreeFEM se realizó mediante lectura y escritura de archivos.

5.1. Escenarios de operación de ITER

En la sección 1.3 presentamos los distintos escenarios de operación previstos para el reactor ITER, y vimos que difieren principalmente en sus perfiles de factor de seguridad y presión. En lo que sigue, tomamos como base estas figuras de mérito para calcular equilibrios representativos de escenarios de bajo q (estándar), bajo *shear* (híbrido), y q invertido (avanzado). Estos equilibrios se encuentran representados en la figura 1.5a.

El método para cada caso es como sigue: inicialmente resolvemos el problema de autovalores fijando parámetros β e $I_{\text{TOR}}^{\text{ITER}}$ típicos del escenario y una separatriz de tipo ITER. Los valores de β e $I_{\text{TOR}}^{\text{ITER}}$ impuestos se muestran en la tabla 5.1. En cuanto a la separatriz, la caracterizamos por $a^{\text{ITER}} = 2$ m, $R_0^{\text{ITER}} = 6,2$ m, $\kappa = 1,7$ y $\delta = 0,4$, y

consideramos dos discretizaciones, una de 300 puntos en el borde y otra de 600. A este segundo caso lo llamaremos de *alta resolución*.

	Bajo q	Bajo $shear$	$Shear$ invertido
I_{TOR}^{ITER} [MA]	17	15	13.8
B_0^{ITER} [T]	5.3	5.3	5.3
β	3.52 %	2.55 %	2.47 %

Tabla 5.1: Valores de campo, corriente y β de distintos escenarios de operación previstos para ITER. Datos obtenidos de [2].

De esta forma encontramos una buena primera estimación del equilibrio deseado, ya que la autofunción tiene un perfil de q similar a este en la región cercana al borde y una presión de magnitud adecuada. Una vez calculado este primer equilibrio, prescribimos nuevos perfiles de q y de p correspondientes al escenario de operación de interés. Para esto modificamos el perfil de q de la autofunción sumando funciones gaussianas en la región $\rho < 0,5$ e imponemos un perfil de presión basado en resultados típicos de reconstrucciones de equilibrio realizadas con el código de transporte TRANSP [20]. Los nuevos perfiles se muestran en las figuras 5.1 y 5.2.

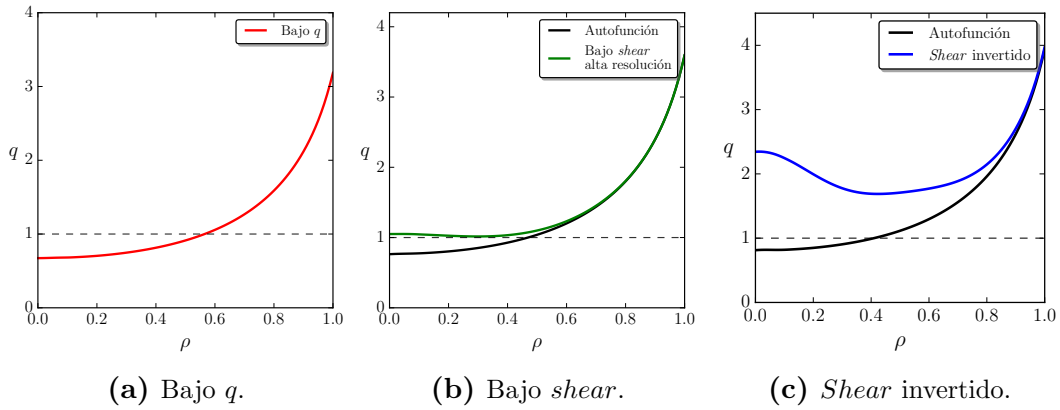


Figura 5.1: Comparación entre los perfiles de q de las autofunciones y los modificados para representar escenarios de operación.

En el caso particular de bajo q dejamos sin modificar el perfil del factor de seguridad de la autofunción, ya que de por sí es representativo de este escenario. En cuanto a los perfiles de presión, empleamos en los primeros dos casos uno con un gradiente mayor al del de la autofunción en la región cercana al borde, representando una barrera de transporte típica del modo H, mientras que en el caso de $shear$ invertido imponemos un perfil con un gradiente mayor en el interior del plasma, representando una barrera de transporte interna (ITB).

Finalmente aplicamos el método descrito en el capítulo 4 para encontrar el equilibrio, tomando un total de 20 iteraciones para evaluar el nivel de aproximación obtenido y renormalizando la presión en cada paso de forma tal de obtener el valor de β deseado.

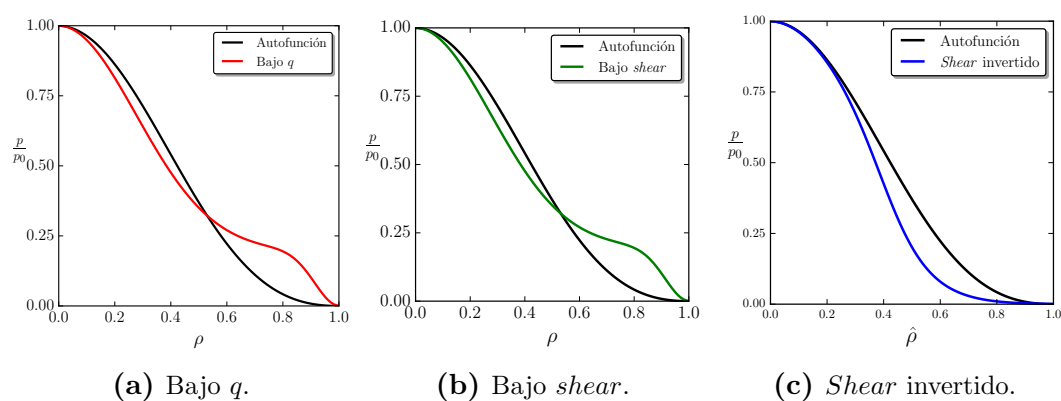


Figura 5.2: Comparación entre los perfiles de p de las autofunciones y los impuestos.

5.1.1. Implementación

En las figuras 5.3a, 5.3b y 5.3c mostramos las primeras cuatro iteraciones del método para los tres casos estudiados.

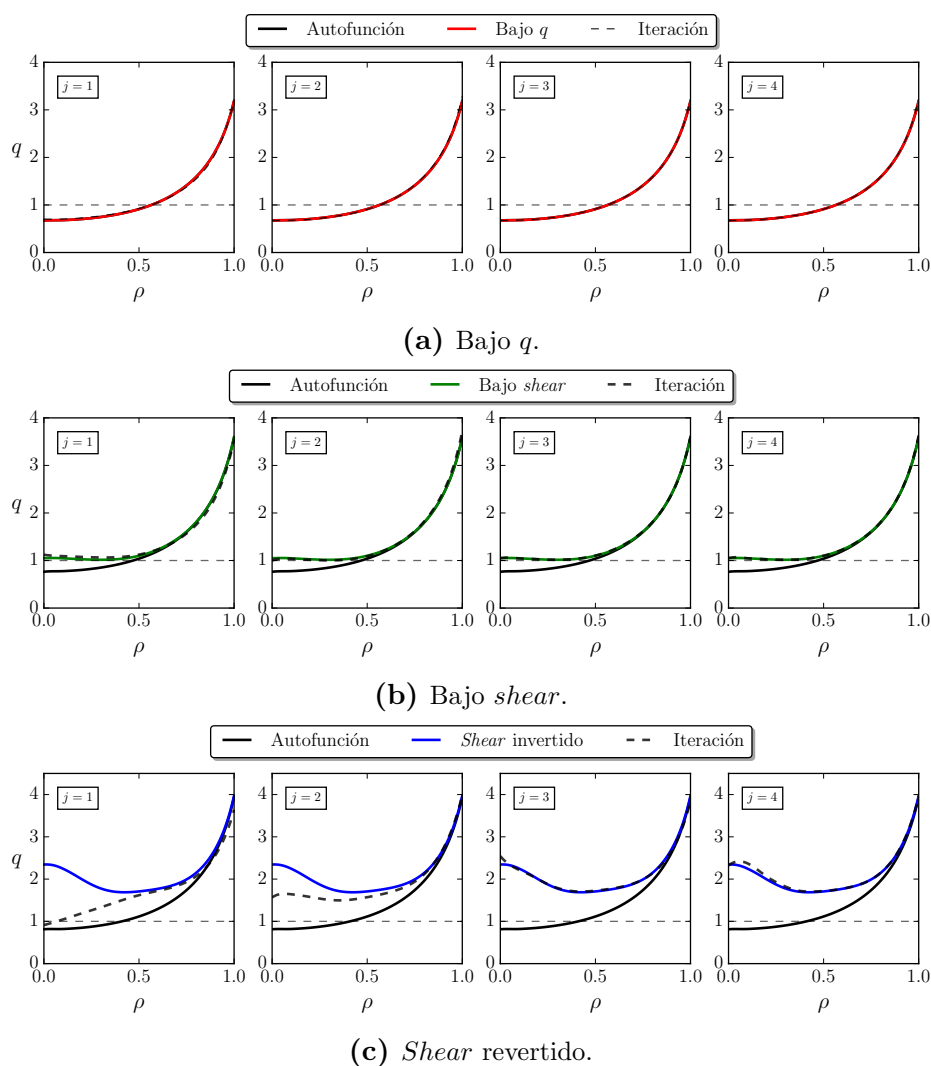
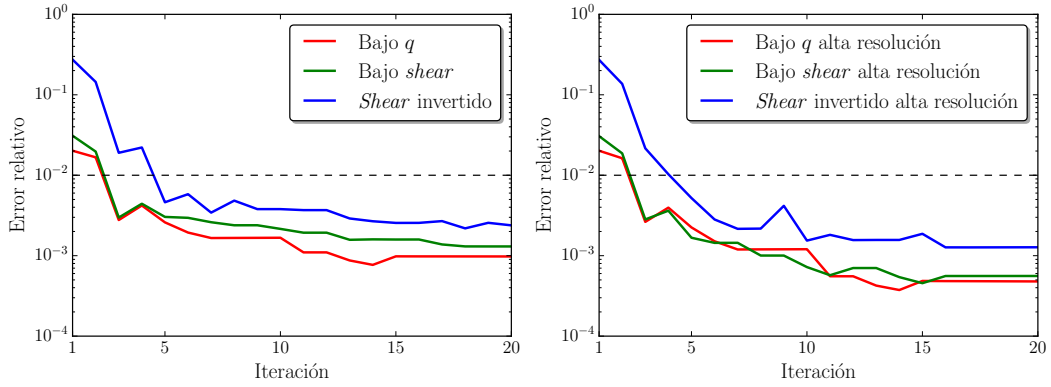


Figura 5.3: Primeras cuatro iteraciones para la aproximación de equilibrios, con 300 puntos en la frontera.

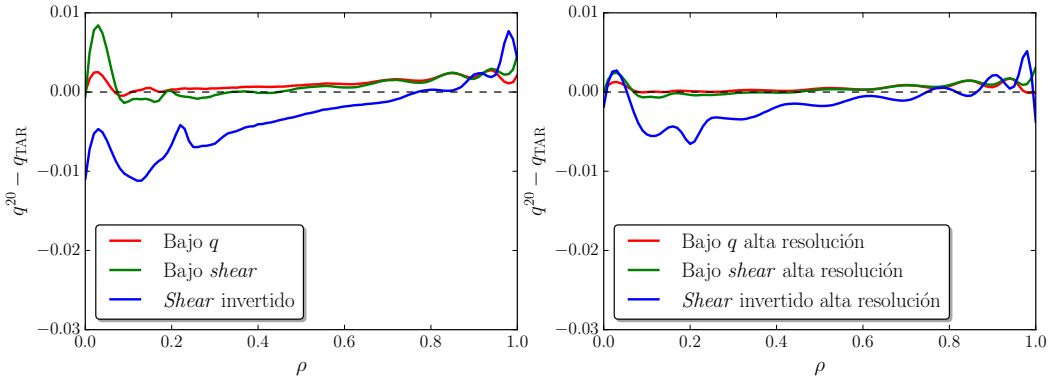
Como podemos ver, el método es capaz de encontrar un equilibrio con un perfil de q similar al deseado en las primeras iteraciones. Para estudiar la convergencia calculamos el error relativo en el factor de seguridad q para cada iteración, tal como se muestra en la figura 5.4a. Este error relativo está definido como

$$\text{Error relativo} = \frac{\|q_j - q_{\text{TAR}}\|}{\|q_{\text{TAR}}\|}, \quad (5.1)$$

donde q_j y q_{TAR} corresponden al factor de seguridad del equilibrio encontrado en el paso iterativo j y al factor de seguridad impuesto respectivamente.



(a) Error relativo en q en función del número de iteraciones.



(b) Error en el factor de seguridad para $j = 20$.

Figura 5.4: Error en la estimación de q .

En todos los casos el error se mantiene por debajo del 1 % luego de la quinta iteración, tendiendo posteriormente a un valor constante cercano al 0,3 %. Esta precisión es suficiente para aplicaciones prácticas, ya que en situaciones experimentales el factor de seguridad es una cantidad difícil de medir. Además, consideraremos esta como la precisión máxima esperable en el valor de q para la implementación actual del método.

El hecho de que el error tienda a un valor constante está fuertemente ligado a errores en el cálculo de derivadas e integrales de funciones discretizadas, principalmente por la dificultad de calcular el factor de seguridad en la región cercana al eje magnético. Esto último se debe a que en dicha región los dominios de integración son pequeños, y por

tanto se dispone de menos puntos para realizar la integración.

En cuanto al caso de alta resolución, si bien no hay una mejora significativa en la convergencia del método, se aprecia una mejor estimación de q en la zona central (ver figura 5.4b). Este comportamiento se debe a que al aumentar la resolución del mallado en elementos finitos disminuye el error en el cálculo de integrales en la región cercana al eje magnético, por lo que el valor de q puede ser estimado con mayor precisión.

Sin embargo, en la implementación actual, q se calcula mediante las integrales de contorno (4.17). Notar que tanto la longitud del contorno como el denominador tienden a cero en el magnético, por eso el error no disminuye en forma apreciable al aumentar la resolución. En una implementación futura, se aconseja buscar otro método de estimación de q_0 , como el sugerido en la Ref. [4].

5.1.2. Densidad de corriente

Otra magnitud de interés de la configuración es la corriente alineada al campo, definida como

$$\langle J_{\parallel} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|} \right\rangle \cong \langle J_{\phi} \rangle. \quad (5.2)$$

Como mencionamos en la sección 1.3, esta cantidad es menor en el centro del plasma a medida que aumenta el valor de q_0 . Esto se verifica para los equilibrios encontrados, tal como observamos en las figuras 5.5a y 5.5b.

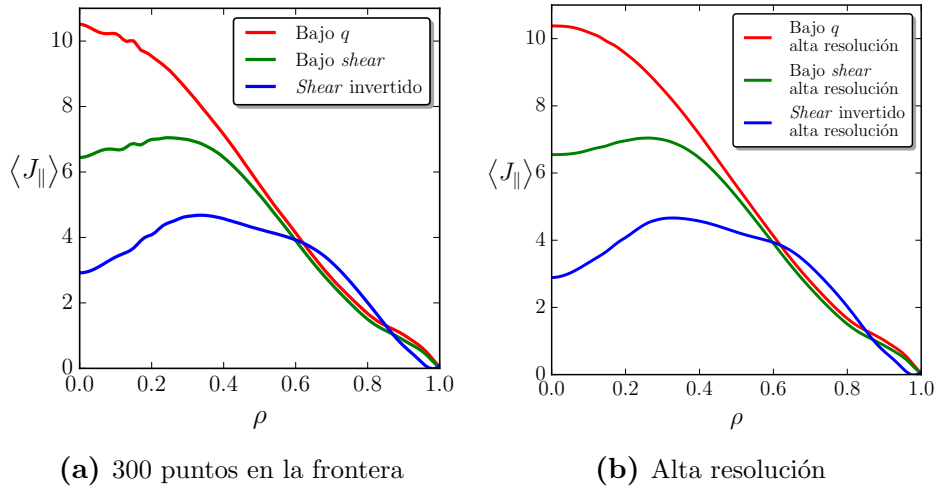


Figura 5.5: Densidad de corriente alineada al campo en la solución encontrada en la iteración $j = 20$.

Las oscilaciones para valores de $\rho < 0,3$ se deben nuevamente a imprecisiones en el cálculo de integrales de camino en la región central del plasma, y se corrigen en gran medida al aumentar la resolución del mallado.

5.1.3. Corriente y factor Beta

Otro aspecto que podemos verificar son los valores finales de $I_{\text{TOR}}^{\text{ITER}}$ y β . Como mencionamos anteriormente, en cada iteración renormalizamos el perfil de presión para mantener β constante. Logramos esto corrigiendo la amplitud de la presión en cada paso j multiplicándola por el cociente $\beta_{\text{TAR}}/\beta^{j-1}$. En cuanto a la corriente total, esta queda determinada por la separatriz y el perfil de q , particularmente por su valor en el borde. En las figuras 5.6a y 5.6b mostramos los valores de β e $I_{\text{TOR}}^{\text{ITER}}$ de cada iteración.

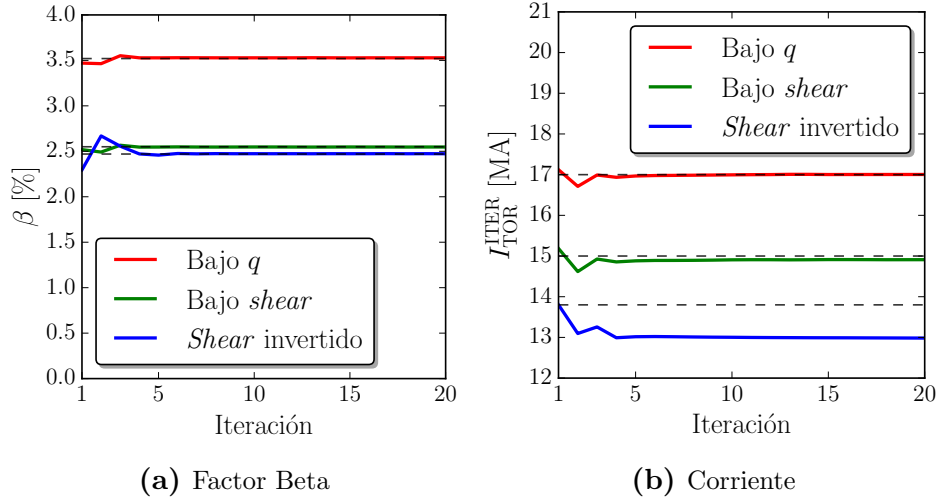


Figura 5.6: Corriente toroidal y factor Beta en función del número de iteraciones. En línea punteada se marcan los valores de la tabla 5.1

Podemos ver que el valor de β puede ser controlado de forma efectiva en todas las iteraciones, mientras que la corriente se mantiene dentro del rango deseado ya que mantenemos el mismo q en el borde que en la autofunción.

5.2. Evolución del equilibrio debido a la difusión magnética

Mencionamos en el capítulo 4 que para formular una descripción completa del transporte en el plasma es necesario acoplar la ecuación de difusión magnética con la resolución del equilibrio de fuerzas MHD. En una implementación numérica, esto implica resolver la condición de equilibrio entre distintos pasos difusivos, lo cual en la actualidad lleva a un gran coste computacional. Es por esto que en muchas situaciones se opta por tomar un único equilibrio de referencia y resolver la ecuación de difusión magnética en base a el. En esta sección mostramos la capacidad del método para resolver el equilibrio rápidamente a lo largo de varios pasos difusivos. Para esto partimos de datos obtenidos de la simulación de una descarga de ~ 4 segundos de duración en el reactor D3D [22]. Esta simulación está basada en un único equilibrio de referencia, y

nuestro objetivo es mostrar que el método explicado la sección 4.3.2 permite recalculer el equilibrio en cada paso difusivo. En este sentido

5.2.1. Datos externos

Partimos de la información de una geometría de separatriz típica de las descargas del reactor D3D, caracterizada por $a^{\text{D3D}} = 0,6$ m, $R_0^{\text{D3D}} = 1,8$ m, $\kappa = 1,5$ y $\delta = 0,4$, y a la cual discretizamos en 300 puntos. Ilustramos este contorno en la figura 5.7.

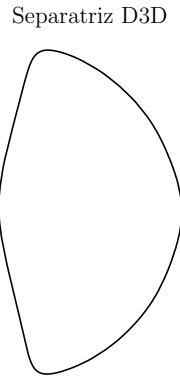


Figura 5.7: Separatriz del reactor D3D.

Además, fijamos $B_0^{\text{D3D}} = 2$ T. Disponemos datos del valor de β e I_{TOR} junto con el perfil de $p(\rho)$ normalizado y $q(\rho)$ de 200 pasos difusivos.

5.2.2. Descripción de la descarga

La descarga comienza en un estado de baja presión y corriente, con $\beta \sim 0,1\%$ e $I_{\text{TAR}}^{\text{D3D}} \sim 0,5$ MA, en la cual el perfil de q es invertido en el centro. En una primer fase de evolución denominada *ramp up*, tanto β como $I_{\text{TAR}}^{\text{D3D}}$ aumentan de manera aproximadamente lineal con el tiempo. Luego de esto la corriente se estabiliza en $I_{\text{TAR}}^{\text{D3D}} \sim 1$ MA, y posteriormente sucede lo mismo con β que alcanza un valor de $\sim 1,4\%$. Esta última fase se conoce como *flat top*.

5.2.3. Implementación

Comenzamos desde el quinto paso difusivo, utilizando el mismo procedimiento que en la sección 5.1 para reconstruir este equilibrio con un error relativo en q menor al 1 %. Ignoramos los pasos anteriores ya que los datos que poseemos de sus perfiles de q presentan irregularidades en la región central, por lo que no pudieron ser aproximados con buena precisión. Posteriormente aplicamos el método descrito en la sección 4.3.1 en cada paso difusivo a modo de reproducir la evolución de la descarga, renormalizando la presión para seguir la evolución de β . Todos los resultados presentados en esta sección

fueron obtenidos en una computadora con CPU Intel[®] Core[™] i7-5500U de 2.40GHz y memoria RAM de 8GiB. En las figuras 5.8a a 5.8d mostramos las reconstrucciones del equilibrio obtenidas, mientras que la figura 5.8e se aprecia el error relativo en q encontrado para para cada paso difusivo.

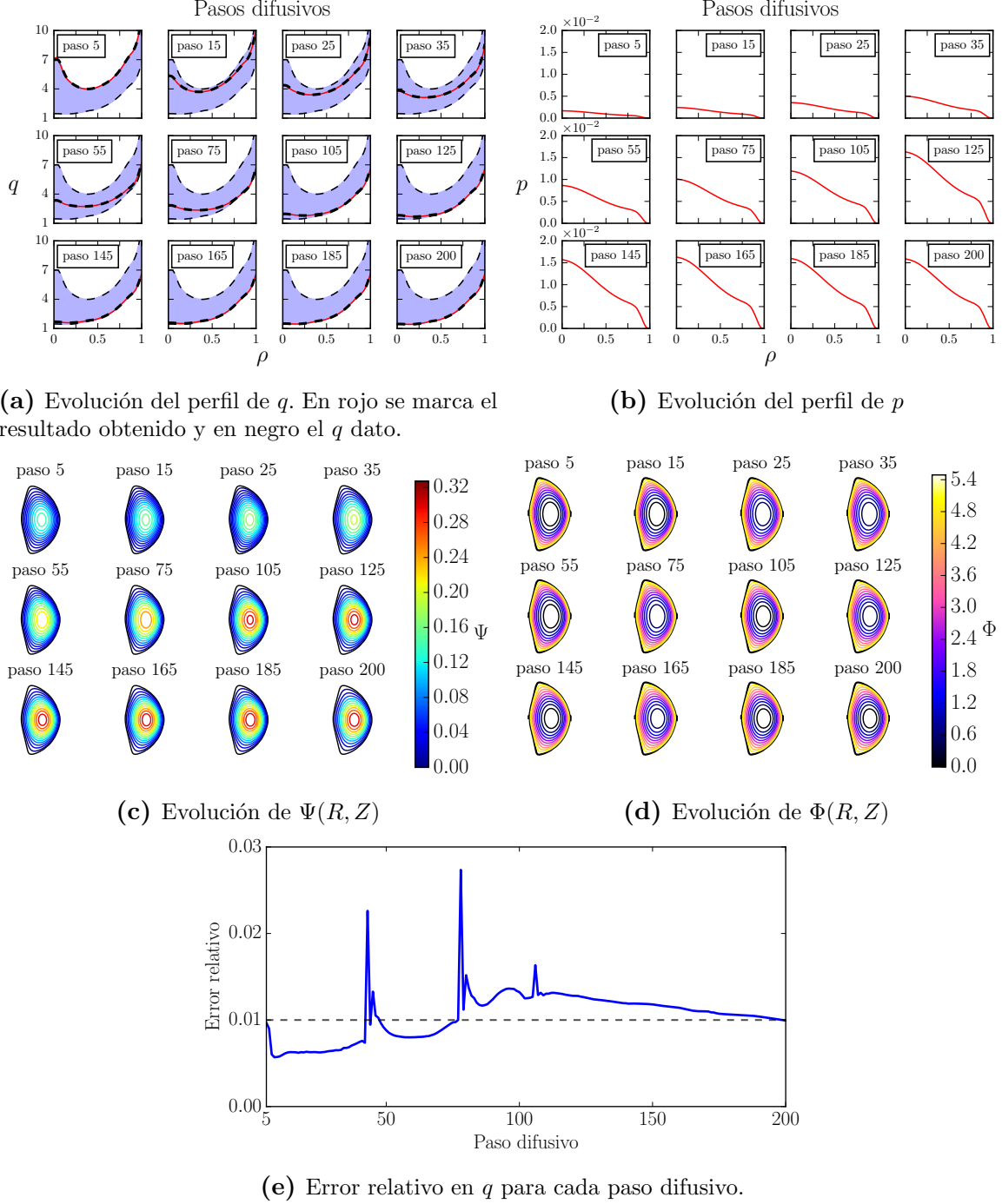


Figura 5.8: Evolución temporal de la descarga.

Como podemos ver, los perfiles de q y p se estabilizan a partir de $n \sim 100$, momento en el cual comienza la fase *flat top*. En cuanto al error, este se mantiene cercano al 1% a lo largo de la evolución de la descarga, a excepción de algunos pasos difu-

sivos en los cuales aumenta a valores cercanos al 3%. Además, en las figuras 5.8c y 5.8d podemos apreciar como la distribución de la función de flujo poloidal cambia significativamente entre iteraciones, mientras que la cantidad de flujo toroidal total se mantiene aproximadamente constante con reajustes menores en la geometría de las superficies.

Los picos observados en el gráfico 5.8e son causados por malas estimaciones en el valor de q en la zona central. A modo ilustrativo, podemos considerar la figura 5.9, donde se muestra la evolución de q alrededor del primer pico.

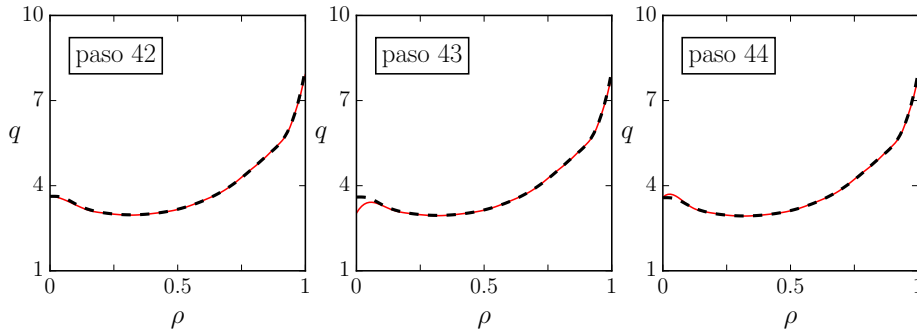


Figura 5.9: Comportamiento anómalo de la aproximación de q en la región central. En rojo se marca el resultado obtenido y en negro el q dato.

Es evidente que es necesario mejorar la estimación de q en esta región, lo cual esperamos lograr en el futuro implementando nuevas estrategias que permitan minimizar esta fuente de error.

Corriente toroidal y Beta

Un factor importante a verificar son los valores de β e $I_{\text{TOR}}^{\text{D3D}}$ encontrados para cada paso difusivo, lo cual se muestra en la figura 5.10. Podemos ver que el método permite replicar adecuadamente el valor de β en cada paso, pero no así el valor de corriente. Esta discrepancia se debe probablemente a un error en el tamaño de la separatriz utilizado.

5.2.4. Actualización intermitente del equilibrio

Esta primera implementación del método requirió de 1970 s de tiempo de cómputo, el cual medimos ignorando el tiempo empleado en calcular el primer equilibrio. Si bien esperamos en el futuro reducir el coste computacional mejorando la comunicación entre procesos, (ya que en la versión actual esto se hace mediante escritura-lectura de archivos), gran parte de este recae sobre la implementación del método de Newton-Raphson. Es por esto que nos vemos motivados a calcular el equilibrio cada una cantidad $\Delta n > 1$ de pasos difusivos, a modo de minimizar los cálculos de equilibrio. Si bien esto implica

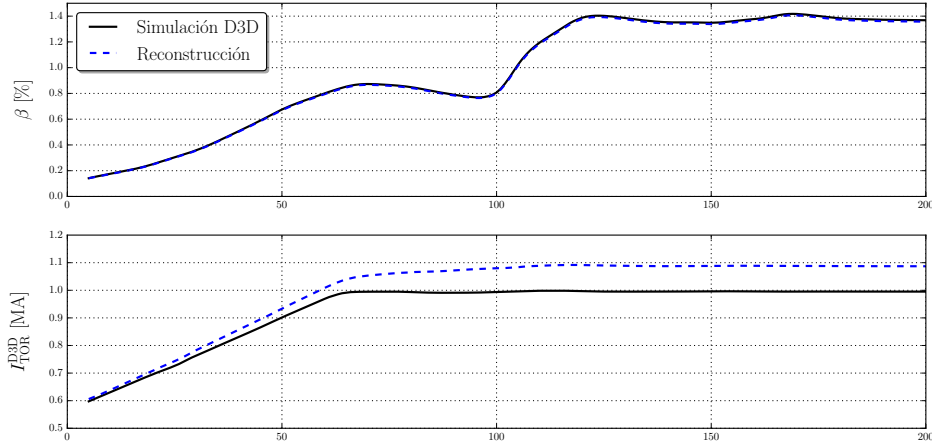
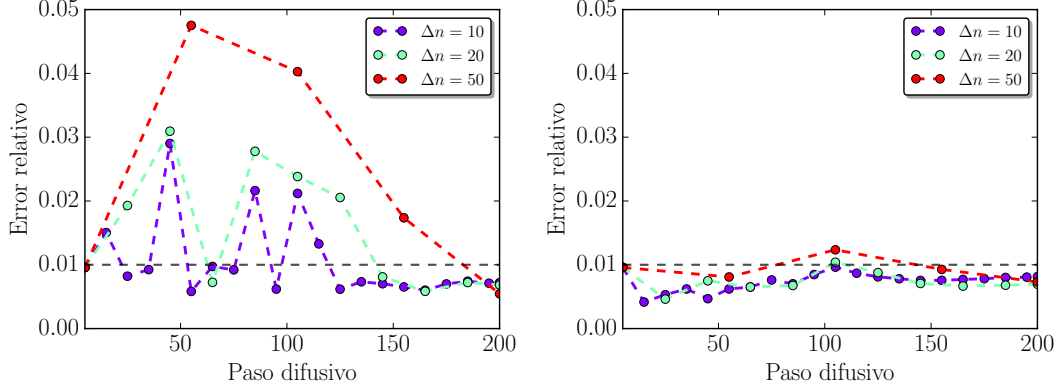


Figura 5.10: Valor de Beta y corriente toroidal

no conocer el equilibrio entre pasos difusivos intermedios, esta implementación es una mejora respecto a mantener un único equilibrio durante toda la simulación. En este sentido, consideramos la implementación anterior como el caso $\Delta n = 1$ y repetimos el procedimiento para $\Delta n = 10, 20$ y 50 .

En la figura 5.11a se aprecia el error relativo en cada iteración para los tres casos mencionados.



(a) 1 iteración por paso difusivo.

(b) 2 iteraciones por paso difusivo.

Figura 5.11: Error relativo en q para $\Delta n = 10, 20$ y 50 pasos difusivos.

Como podemos ver, el error en q se mantiene por debajo del 5 % para $\Delta n = 50$ y es menor aún para $\Delta n = 10$ y 20 , entrando dentro del rango de incerteza que encontramos anteriormente. Más aún, en la región *flat top* la aproximación es mejor en los últimos dos casos que en la situación $\Delta n = 1$. Atribuimos esto a un efecto memoria, en el que la información correspondiente a los equilibrios *mal calculados*, (es decir, los correspondientes a los picos del gráfico 5.8e), se propaga hacia los pasos difusivos siguientes. Este efecto debe ser estudiado en un futuro para mejorar la implementación, de forma de evitar la presencia de picos o aumentar la disipación numérica de la información que transmiten a los demás pasos.

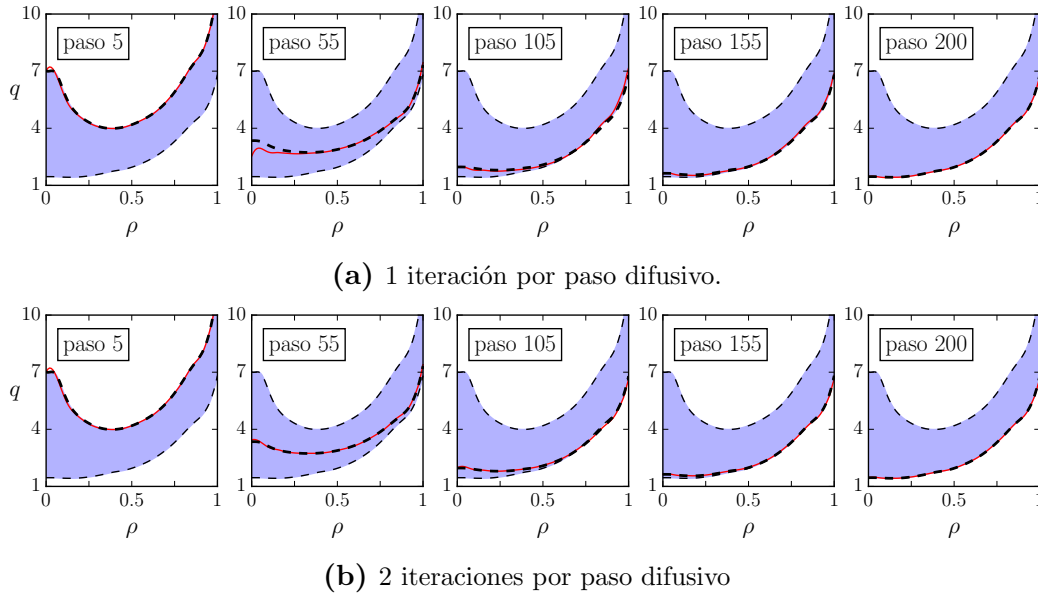


Figura 5.12: Perfiles de q para $\Delta n = 50$. En rojo se marca el resultado obtenido y en negro el q dato.

Las aproximaciones al equilibrio encontradas se pueden mejorar agregando una iteración extra en cada paso difusivo, a modo de corregir el valor de q . Al hacer esto el error disminuye considerablemente en todos los casos, llegando a la precisión esperable encontrada en la sección 5.1, tal como se aprecia en la figura 5.11b.

La región del perfil de q que más se modifica tras esta segunda iteración es la zona de $\rho < 0,5$, ya que aquí vuelve a presentarse el mismo problema que discutimos anteriormente respecto al cálculo de q en el centro. Encontramos un ejemplo claro de esto en las figuras 5.12a y 5.12b, en las que se aprecia una gran corrección en el valor de q para el paso difusivo 55.

Tiempo de cómputo

En la tabla 5.2 podemos ver el tiempo de cómputo que fue necesario para cada caso.

	$\Delta n = 10$	$\Delta n = 20$	$\Delta n = 50$
1 iteración por paso	292 s	141 s	85 s
2 iteraciones por paso	434 s	246 s	124 s

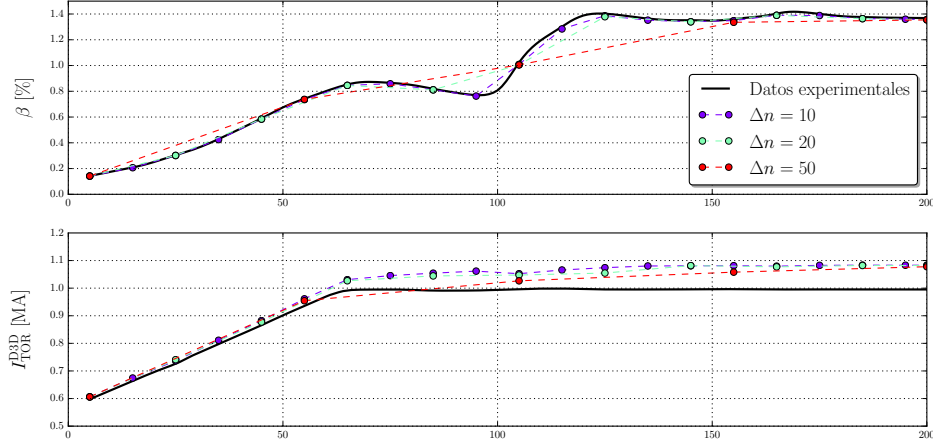
Tabla 5.2: Tiempos de cómputo para los distintos j y Δn .

Como esperábamos, estos tiempos son mucho menores que los encontrados para $\Delta n = 1$. Al agregar un paso difusivo extra, el tiempo de cómputo no se duplica, sino que aumenta en un factor $\sim 1,5$. Este comportamiento se debe a que en la segunda iteración la corrección al equilibrio es menor, y por tanto requiere de una menor cantidad de pasos de NR en la resolución del equilibrio. De igual manera, en los casos de una iteración por paso, la reducción en tiempo computacional no es inversamente proporcional a Δn .

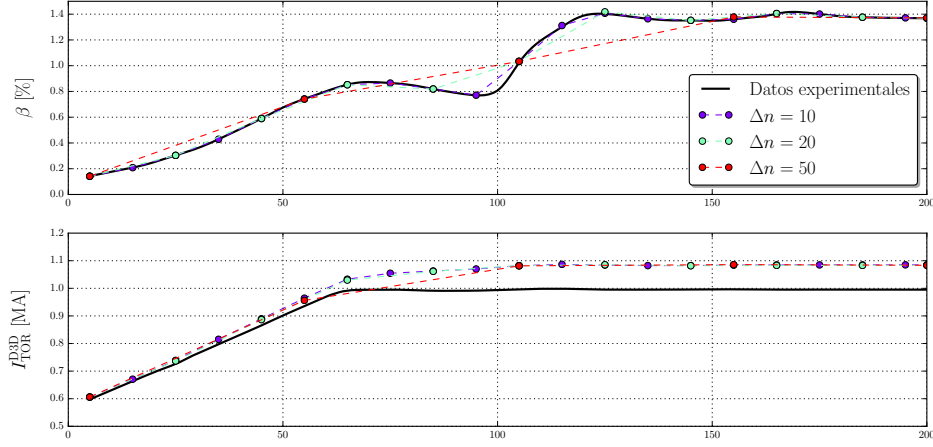
de manera estricta, ya que los casos de Δn menor requieren de menos iteraciones de NR por equilibrio.

Beta y corriente

Consideramos por último los valores de β e $I_{\text{TOR}}^{\text{ITER}}$ calculados en cada paso, los cuales podemos ver en las figuras 5.13a y 5.13a.



(a) 1 iteración por paso difusivo.



(b) 2 iteraciones por paso difusivo.

Figura 5.13: Evolución de la corriente toroidal y del factor β .

Podemos apreciar aquí que el método es capaz de seguir la evolución de β a lo largo de todos los pasos difusivos, incluso para $\Delta n = 50$ y una única iteración por paso. En cuanto a la corriente, encontramos una corrección al agregar una iteración extra a cada paso difusivo, la cual se debe justamente a la mejor estimación de q .

5.3. Resumen

En conclusión, el método desarrollado permite calcular en pocas iteraciones equilibrios con perfiles de q y p prescritos, así como estimar satisfactoriamente la condición

de equilibrio entre pasos de difusión magnética. Esto último lo convierte en un buen candidato como método de acoplamiento entre la ecuación de transporte y el cálculo del equilibrio. A futuro se debe mejorar su implementación, particularmente mejorando el cálculo de q en la región central.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se estudió el equilibrio MHD con frontera fija en configuraciones de interés para fusión nuclear controlada. Uno de los principales objetivos es desarrollar un método que permita resolver el equilibrio partiendo de la información otorgada por los códigos actuales de transporte, de forma tal de poder utilizarlo para acoplar la ecuación de difusión magnética a la resolución del equilibrio MHD. Además, utilizando las mismas técnicas se implementó un método capaz de resolver el equilibrio de manera iterativa a partir de perfiles de presión y factor de seguridad prescritos. Para poder resolver el problema con una forma arbitraria de la separatriz del plasma, se optó por el método de elementos finitos. Se implementó la formulación de Grad-Shafranov en el código Freefem++ [11]. Como el problema del equilibrio MHD es en general no lineal, se implementó también la iteración de Newton-Raphson para tratar el término no lineal.

En este sentido, se calcularon exitosamente equilibrios representativos de diversos escenarios de operación del reactor ITER. Para esto se consideró una geometría similar a la de diseño de ITER, aunque sin incluir el divertor. Partiendo de una solución del problema de autovalores, se calcularon tres equilibrios representativos de los escenarios de confinamiento estándar, híbrido y avanzado, prescribiendo perfiles de presión y factor de seguridad representativos de dichos escenarios. Se encontró que el método desarrollado es capaz de estimar el equilibrio con un error relativo en q del orden del 0,5 %, lo que representa una precisión muy buena para las aplicaciones de interés.

Por último, se empleó el método desarrollado para calcular el equilibrio a través de varios pasos difusivos de una simulación de difusión magnética de una descarga en el reactor D3D. En una primer instancia se calcularon equilibrios para todos los pasos difusivos, caso en el que se obtuvo un error relativo en el factor de seguridad cercano al 1 % para todos los pasos. Se observó que en algunas ocasiones se obtiene una mala estimación del factor de seguridad en la región central, problema que debe ser solucionado en implementaciones futuras mejorando cálculo de q en la zona cercana al

eje magnético. Posteriormente, se calcularon equilibrios cada saltos Δn en la cantidad de pasos difusivos, con $\Delta n = 10, 20$ y 50 , con el objetivo de disminuir el tiempo de cómputo necesario para reproducir la descarga. En estos casos el error relativo es mayor en la fase *ramp up* que en el caso $\Delta n = 1$, llegando a valores de entre 3 y 5 %, pero disminuyendo hasta valores incluso menores que los obtenidos en la primer instancia durante la fase estacionaria de la descarga (*flat top*). Atribuimos esto último a un efecto memoria que propaga el error en el cálculo de un equilibrio a iteraciones siguientes. Por último, repetimos los casos de $\Delta n = 10, 20$ y 50 pero agregando una iteración extra al método para disminuir el error. Se observó una disminución considerable del error relativo, llegándose a valores cercanos a la precisión máxima esperable con la discretización empleada. Además, debido a que esta segunda iteración se trataba de una corrección menor, requiere de una menor cantidad de pasos en el método de Newton-Raphson y el coste computacional aumenta sólo en un 50 %. Los resultados obtenidos indican que el método desarrollado es capaz de resolver de manera relativamente sencilla el equilibrio a partir de la información otorgada por los códigos actuales de transporte, lo cual lo convierte en un método adecuado para el acoplamiento de la ecuación de difusión magnética con la resolución de la condición de equilibrio de fuerzas MHD.

Bibliografía

- [1] Shimada, M., Campbell, D., Mukhovatov, V., Fujiwara, M., Kirneva, N., Lackner, K., *et al.* Chapter 1: Overview and summary. *Nuclear Fusion*, **47** (6), S1, 2007. URL <http://stacks.iop.org/0029-5515/47/i=6/a=S01>. xi, 8, 9
- [2] Igochine, V. Active Control of MHD Instabilities. New York: Springer, 2015. xi, 52
- [3] Wesson, J. Tokamaks (Second Edition). Oxford University Press, 1997. 5, 41
- [4] Freidberg, J. P. Ideal magnetohydrodynamics. London/New York: Plenum Press, 1987. 11, 55
- [5] Hinton, F. L., Hazeltine, R. D. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems. *Rev. Mod. Phys.*, **48**, 239–308, Apr 1976. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.48.239>. 15, 40, 41
- [6] Blum, J. Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics. Chichester/New York/Brisbane/Toronto/Singapore: John Wiley & Sons, 1989. 24, 41
- [7] Jardin, S. Computational Methods in Plasma Physics. Boca Raton: CRC Press, 2010. 24, 40, 43
- [8] Pironti, A., Ariola, M. Magnetic Control of Tokamak Plasmas. Napoli: Springer, 2008. 24
- [9] LoDestro, L. L., Pearlstein, L. D. On the grad–shafranov equation as an eigenvalue problem, with implications for q solvers. *Physics of Plasmas*, **1** (1), 90–95, 1994. URL <https://doi.org/10.1063/1.870464>. 25, 26
- [10] Lee, J., Cerfon, A. Ecom: A fast and accurate solver for toroidal axisymmetric mhd equilibria. *Computer Physics Communications*, **190** (Supplement C), 72 – 88, 2015. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465515000351>. 26

- [11] Hecht, F. New development in freefem++. *J. Numer. Math.*, **20** (3-4), 251–265, 2012. 30, 65
- [12] Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., Flannery, B. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.). New York: Cambridge University Press, 2007. 30
- [13] Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods (2nd ed.). Dover, 2000. 34
- [14] Johnson, C. Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. Dover, 1987. 35
- [15] Ferron, J., Walker, M., Lao, L., John, H. S., Humphreys, D., Leuer, J. Real time equilibrium reconstruction for tokamak discharge control. *Nuclear Fusion*, **38** (7), 1055, 1998. URL <http://stacks.iop.org/0029-5515/38/i=7/a=308>. 40
- [16] Moreau, D., Mazon, D., Walker, M., Ferron, J., Burrell, K., Flanagan, S., *et al.* Plasma models for real-time control of advanced tokamak scenarios. *Nuclear Fusion*, **51** (6), 063009, 2011. URL <http://stacks.iop.org/0029-5515/51/i=6/a=063009>. 40
- [17] Ou, Y., Luce, T., Schuster, E., Ferron, J., Walker, M., Xu, C., *et al.* Towards model-based current profile control at diiii-d. *Fusion Engineering and Design*, **82** (5), 1153 – 1160, 2007. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920379607001755>, proceedings of the 24th Symposium on Fusion Technology. 40, 41
- [18] Felici, F., Sauter, O., Coda, S., Duval, B., Goodman, T., Moret, J.-M., *et al.* Real-time physics-model-based simulation of the current density profile in tokamak plasmas. *Nuclear Fusion*, **51** (8), 083052, 2011. URL <http://stacks.iop.org/0029-5515/51/i=8/a=083052>. 41, 42
- [19] Blum, J., Foll, J. L., Thooris, B. The self-consistent equilibrium and diffusion code sced. *Computer Physics Communications*, **24** (3), 235 – 254, 1981. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0010465581901491>. 41
- [20] TRANSP code. URL <http://transpweb.pppl.gov/>. 52
- [21] Fable, E., Angioni, C., Casson, F. J., Told, D., Ivanov, A. A., Jenko, F., *et al.* Novel free-boundary equilibrium and transport solver with theory-based models and its validation against asdex upgrade current ramp scenarios. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **55** (12), 124028, 2013. URL <http://stacks.iop.org/0741-3335/55/i=12/a=124028>. 41, 46

-
- [22] Barton, J. E., Shi, W., Besseghir, K., Lister, J., Kritz, A., Schuster, E., *et al.* Physics-based control-oriented modeling of the safety factor profile dynamics in high performance tokamak plasmas. *En*: 52nd IEEE Conference on Decision and Control, págs. 4182–4187. 2013. [41](#), [42](#), [56](#)
- [23] Artaud, J., Basiuk, V., Imbeaux, F., Schneider, M., Garcia, J., Giruzzi, G., *et al.* The cronos suite of codes for integrated tokamak modelling. *Nuclear Fusion*, **50** (4), 043001, 2010. URL <http://stacks.iop.org/0029-5515/50/i=4/a=043001>. [46](#)

Agradecimientos

Quiero aprovechar este espacio para agradecer a todos los que me han acompañado durante este largo y arduo camino, tanto a mi familia que siempre me apoyó y me recibió con cariño durante las vacaciones y semanitas, como a todos mis amigos y amigas fuera y dentro del instituto. Menciones especiales para Livio por ser el compañero de habitación mas duradero, y a quien extrañaré pese a nuestras diferencias irreconciliables de opinión, a Nachito, Jorge y Nahuel por tantos jueves de Cineclub, a Seba por las clases de funcional, Yasuo por ser un compañero de cuarto menos duradero pero aún así estar ahí en los momentos clave, Pato, Andy, Lucy, Luis, Juan y Edu por tantas charlas a 1200 km de distancia, y a Lara, Cate y Cristina por haber sido tan buenas amigas y darme alegría en tantos momentos. Todo aquel que no ha sido mencionado, sepa que aún así recordaré sus nombres por siempre.

Por último, quiero también agradecer a la CNEA, UNCuyo y al Instituto Balseiro por esta oportunidad maravillosa, a todos mis profesores por haberme formado durante todos estos años, y en particular a mi director Pablo, cuyo acompañamiento moral y facturesco en esta etapa final fue clave para alcanzar esta meta.

Gracias a todos. Esto ha sido inolvidable, y quedará por siempre en mi memoria.

